MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2017-01-02.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Caroline Granfeldt, 031-772 5325.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Definiera begreppen *delare*, *största gemensamma delare* och *primtal*. (2p)

2. Låt G vara en mängd med en operator $\star$.

   (a) Ge de fyra axiomen att $(G, \star)$ är en abelsk grupp.

   (b) Låt $(G, \star)$ vara en abelsk grupp och $x, y, z \in G$. Visa utifrån axiomen att om $x \star y = x \star z$ så är $y = z$. Ange i varje steg vilket axiom du använder, så speciellt ska det framgå vilka av de fyra axiomen som används i beviset.

   (4p)

3. Låt R vara en ekvivalensrelation på en mängd A. Visa att ekvivalensklasserna till R utgör en partition av A. (3p)

4. (a) Primtalsfaktorisera 12103.

   (b) Hur många positiva delare har 12103? Motivera ditt svar. (3p)

5. En standardkortlek (utan jokrar) innehåller 52 kort. Dessa består av 4 olika sviter (klöver, ruter, hjärter och spader) som samtliga innehåller 13 olika valörer (2-10 + knekt, dam, kung och ess). Det finns alltså 4 olika tvåor, 4 olika treor, etc. En pokerhand består av 5 stycken kort och i en sådan spelar ordningen mellan korten ingen roll. Hur många olika pokerhänder finns det med korten i en standardkortlek utan jokrar som innehåller

   (a) exakt 3 stycken tvåor? (övriga kort kan vara vad som helst utom en tvåa)

   (b) 3 kort i en valör och 2 kort i en annan valör (d v s en "kåk")?

   (c) 5 kort som alla är av olika valör?

   Svaren måste motiveras. För att få full poäng ska man i de två första deluppgifterna räkna ut svaret som ett heltal och i den sista skriva svaret som dess primtalsfaktorisering.

   Observera att sviten spelar roll, d v s en hand som innehåller t ex klöver, ruter och hjärter två (och inte spader två) kan aldrig vara samma hand som en som innehåller klöver, ruter och spader två (och inte hjärter två). (4p)

Var god vänd!

6. Visa att för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} (3k(k-1)+1) = n^3.$$

(3p)

7. Låt p och q vara två positiva heltal och $\mathbb{Z}_n$ betecknar (som vanligt) ekvivalensklasserna för kongruens modulo $n \in \mathbb{Z}_+$. Vi definierar en funktion

$$f : \mathbb{Z}_{pq} \longleftrightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \text{ med } f\left([x]_{pq}\right) = \left([x]_p, [x]_q\right).$$

   (a) Visa att f är väldefinierad (d v s oberoende av representant för klassen).

   (b) Visa att f är bijektiv om $\operatorname{sgd}(p, q) = 1$.

(3p)

8. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{5^n - 1}{4^n - 1}$$

aldrig är ett heltal. (Tips: Undersök lämpliga kongruenser.) (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 20 januari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Därefter kan skrivningar granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.