GÖTEBORGS UNIVERSITET
MATEMATIK 1, MMG200, HT2016
INLEDANDE ALGEBRA

Övningshäfte 1: Logik och matematikens språk

Övning A

Målet är

- att genom att lösa och diskutera några inledande uppgifter få erfarenheter om hur en uppgift kan tolkas och förstås.
- att diskutera och öka förståelsen för vad det innebär att bevisa eller motbevisa ett påstående.
- att utveckla förmågan till kritiskt logiskt resonerande och förmågan att formulera sina logiska resonemang.

1. Fundera en stund (t ex när du äter din kvällsmacka) över följande frågor:
   (a) Vad menar du att matematik är?
   (b) Vad är ett problem? Vad är en lösning?
   (c) Vad är ett bevis?
2. Vi inleder med en sats av geometriskt ursprung (men som också kan studeras rent algebraiskt) som ni alla känner till.
   (a) Vad säger Pythagoras sats? Vad betyder den geometriskt? Hur formuleras satsen algebraiskt? Vad menar man med algebraiskt?
   (b) Är satsen sann? Varför det?
   (c) Det finns flera hundra olika bevis för Pythagoras sats. Har du sett något tidigare? Kan du genomföra något? Gör det i så fall och diskutera med kompisarna.
3. Vi ska nu göra ett geometriskt "bevis" av Pythagoras sats. Klipp ut fyra stycken exakt likadana rätvinkliga trianglar. Försök att med dessa fyra trianglar "bevisa" Pythagoras sats.

   Här kommer en liten ledning som hjälp på traven om det går trögt: Lägg de fyra trianglarna så att du får en ytterkontur som är en kvadrat och ett "hål" som också är en kvadrat. Rita upp den kvadratiska ytterkonturen. Flytta nu om trianglarna så att det blir två stycken kvadratiska "hål". Nu är "beviset" klart. Varför?

   Känner ni er övertygade av "beviset"? Kan det finnas något att invända mot det?
4. Klipp ut en av figurerna på sista sidan och klipp därefter ut de fyra vita delfigurerna.
   (a) Kan du av dessa fyra vita delar lägga en kvadrat?

(b) Kan du av dessa fyra vita delar lägga en rektangel som inte är en kvadrat?

(c) Vad blir arean av kvadraten respektive rektangeln?

Blev du överraskad? Är det något som inte stämmer? Hur förklarar du detta? Diskutera med kompisarna. Säger detta något om värderingen av "beviset" av Pythagoras sats i förra uppgiften?

5. Återvänd nu till uppgift 1 delarna b och c.

6. Man definierar det aritmetiska medelvärdet, A, och det geometriska medelvärdet, G, av två positiva tal a och b genom

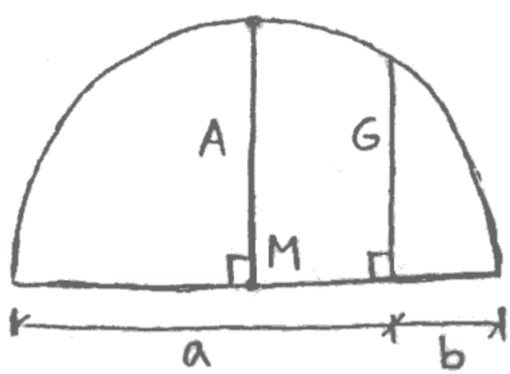
$$A = \frac{a+b}{2} \text{ respektive } G = \sqrt{ab}.$$

(a) Betrakta figur 1 och visa att de två sträckorna A och G tolkar det aritmetiska respektive geometriska medelvärdet. (Figuren visar en halvcirkel med centrum i M och diametern $a + b$.)

(b) Formulera och motivera utifrån figuren en (storleks)relation mellan A och G.

(c) Bevisa relationen algebraiskt. (Tips: Visa att $A - G = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ och utnyttja sedan detta.)

(d) När är $A = G$? Hur ser man det geometriskt respektive algebraiskt?



Figur 1: Geometrisk tolkning av aritmetiskt (A) och geometriskt (G) medelvärde.

7. När man läser ett bevis ska man alltid vara kritisk. Håller argumentet verkligen? I värsta fall leder ett felaktigt argument till ett falskt resultat.

Titta nu på följande resonemang som visar att $1 = 2$. Låt a och b vara två tal som är lika. Vi har då att $a = b$ vilket leder till följande kedja av slutsatser:

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Rightarrow \quad ab = b^2 \Rightarrow ab - a^2 = b^2 - a^2 \\ &\Rightarrow \quad a(b-a) = (b+a)(b-a) \Rightarrow a = b + a \Rightarrow a = a + a \Rightarrow a = 2a \Rightarrow 1 = 2. \end{aligned}$$

(a) Kan argumentet vara korrekt? Varför det?

(b) Om det finns något fel i argumentet så identifiera det.

(c) Visa att man utifrån $1 = 2$ kan visa att alla positiva heltal är lika.

Övning B

Målet är att utveckla kvaliteterna i det logiska tänkandet. Vi vill uppnå största möjliga precision och klarhet och lära oss förstå och använda det matematiska språket. I detta sammanhang är följande begrepp viktiga

- utsagor och predikat
- logiska operatorer som "och" ($\wedge$), "eller" ($\vee$), implikation ($\rightarrow$), ekvivalens ($\leftrightarrow$) och negation ($\neg$)
- tautologi, logisk ekvivalens, logisk implikation och giltiga logiska argument
- kvantorer ($\forall$, $\exists$).

1. Under vilka omständigheter är följande påståenden sanna respektive falska? För vilka värden på variablerna är de sanna respektive falska?

   (a) $3 \leq 3$
   (b) $3 \leq 4$
   (c) $3 < 4$
   (d) $4 \leq 3$
   (e) $\sqrt{4} = 2$ eller $\sqrt{9} = 3$
   (f) $\sqrt{x^2} = x$
   (g) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
   (h) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
   (i) $x > 3 \rightarrow x^2 > 9$

   Vad är en utsaga respektive predikat? Vilka av påståendena ovan är utsagor respektive predikat?

2. Utsagorna (a), (b), (d) och (e) i förra uppgiften kan alla skrivas som sammansatta utsagor med hjälp av operatorn "eller", $\vee$, d v s på formen $A \vee B$ där A och B är utsagor. Gör detta! Diskutera åter sanningsvärdena hos dessa.

3. Diskutera när en disjunktion $A \vee B$ är sann respektive falsk i relation till om A respektive B är sanna. Gå igenom alla möjligheter och sammanfatta i en tabell:

A	B	$A \vee B$
F	F	?
F	S	?
S	F	?
S	S	?

   En sådan tabell kallas för en *sanningstabell*. Jämför er tabell med talspråkets olika tolkningar av "eller". Stämmer de överens?

4. Diskutera när en konjunktion $A \wedge B$ är sann respektive falsk i relation till om A respektive B är sanna. Gör en sanningstabell för operatorn '$\wedge$'.

5. Predikatet (i) i uppgift 1, $x > 3 \to x^2 > 9$, är exempel på en *implikation*, d v s en utsaga av formen $A \to B$. Denna utläses "A medför B" alternativt "om A så B". Är predikatet (i) sant för alla reella tal x?

   Testa predikatet för $x = 5$, $x = 2$ och $x = -4$ och anteckna sanningsvärdena för "$x > 3$" och "$x^2 > 9$" i de tre fallen. Hur "måste" sanningstabellen för implikation se ut om vi vill att (i) ska vara sann för alla reella tal x? Skriv upp sanningstabellen.

6. Använd sanningstabellen för implikation för att avgöra om följande utsagor är sanna eller falska.

   (a) $1 = 2 \to 1 = 1$

   (b) $1 = 2 \to 0 = 1$

   (c) $3 > 2 \to 0 = 1$

   (d) $3 > 2 \to 1 = 1$

7. När är en *ekvivalens*, $A \leftrightarrow B$, sann respektive falsk beroende på om A respektive B är sanna eller falska? Utgå t ex från att predikatet "$x > 0 \leftrightarrow x + 1 > 1$" ska vara sann för alla reella tal x. (Testa att specificera predikatet med olika värden på x.) Hur ser sanningstabellen ut?

8. Vad menas med *motsatsen*? Vad är en *negation*?

   Betrakta utsagorna

   A: Jag dansar och jag sjunger.
   B: Jag äter eller jag sover.
   C: Om det regnar så har jag med mig paraplyt.

   Formulera negationen av utsagorna. Skriv utsagorna och deras negationer med hjälp av logiska operatorer.

9. Försök formulera allmänt hur man enklast uttrycker negationen av utsagor av typerna:

   - $A \wedge B$
   - $A \vee B$
   - $A \to B$

   Med andra ord hur kan man enklast uttrycka $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$ och $\neg(A \to B)$?

10. (a) När är följande utsageformler sanna: $p \vee \neg p$ och $(p \wedge (p \to q)) \to q$?

    (b) Vad menas med en *tautologi*? Hur kan man kolla om något är en tautologi?

    (c) I boken finns det två typer av pilar: enkla ($\to$ och $\leftrightarrow$) och dubbla ($\Longrightarrow$ och $\Leftrightarrow$). Vad är det för skillnad på tolkningen av dessa? Är det någon skillnad? (I de flesta grundläggande textböcker skiljer man inte på dem utan använder en och samma symbol.) Vilken av de två typerna använder man i matematiska bevis?

11. (a) Vad är ett *giltigt logiskt argument*?

(b) Titta på de tre logiska argumenten på övre halvan av sidan 19 i boken. (nedre halvan av sidan 17 i 1:a upplagan) Försök diskutera er fram till en förståelse av dem (de är viktiga principer som används ofta i matematiska bevis) och en förklaring till deras namn: "olika fall", "uteslutning av fall" och "motsägelsebevis".

12. Bestäm negationen till följande utsagor:

    A: Alla människor tycker om matematik.
    B: Det finns (minst) en matematiker som inte tycker om kaffe.
    C: Det finns (minst) en student som klarar alla uppgifterna.

13. Formalisera utsagorna i förra uppgiften med hjälp av *kvantorerna* "för alla" ($\forall$) och "det existerar" ($\exists$). Gör också samma sak för utsagornas negationer. Vad händer med '$\forall$' och '$\exists$' då en utsaga negeras?

14. Låt $K(x, u)$ beteckna "x klarar u" där x är en student och u en uppgift. Då kan utsaga C i uppgift 12 formaliseras som
$$\exists x \forall u : K(x, u).$$
Om vi byter ordning på kvantorerna så får vi en ny utsaga
$$\forall u \exists x : K(x, u).$$
Skriv med vanliga ord vad denna utsaga säger. Är det någon skillnad på de två utsagorna?

15. Förklara med hjälp av observationen i förra uppgiften följande missförstånd:

    — I London blir en person överkörd varje halvtimme.
    — Stackars sate.

16. Negera utsagorna i uppgift 14.

17. Antag att x och y är reella tal och betrakta följande fyra utsagor:

    (a) $\forall x \forall y : x = y \to x^2 = y^2$
    (b) $\forall x \forall y : x^2 = y^2 \to x = y$
    (c) $\forall x \forall y : x = y \leftrightarrow x^2 = y^2$
    (d) $\forall x \forall y : |x| = |y| \to x^2 = y^2$

    (a) Vilka av utsagorna är sanna?
    (b) Vilka av utsagorna är falska? Hur visar man det?
    (c) Diskutera vad ett motexempel är och dess användbarhet.
    (d) Byt ut kvantorerna i de falska utsagorna så att de istället blir sanna.

Övning C

Målet är att ge en intuitiv introduktion till mängdläran och centrala begrepp inom denna. Dessa är centrala i det matematiska språket där man allt som oftast uttrycker sig i termer av mängder. Viktiga begrepp som vi tar upp är

- Mängder och deras element.
- Tillhör ($\in$) och delmängd ($\subseteq$, $\subset$).
- Mängdoperatorerna union, snitt, differens och komplement.
- Venn-diagram.
- Potensmängd och kartesisk produkt.

1. (a) Vad är en mängd?
   (b) Vad betyder det att två mängder är lika? Försök formulera det som en (logisk) utsaga.
2. Betrakta utsagan
$$\forall x : x \in N \to x \in M.$$
   Rita ett Venn-diagram som illustrerar innebörden i utsagan. Uttryck utsagan enbart med mängdlärans beteckningar.
3. Samma som förra uppgiften men nu för utsagan
$$(\forall x : x \in N \to x \in M) \wedge (\exists x : x \in M \wedge x \notin N).$$
4. Gör uppgift 2 i kapitel 2 i boken.
5. (a) Illustrera någon av de distributiva lagarna för mängder (se tabell i kapitel 2 i boken) med hjälp av ett Venn-diagram.
   (b) Bevisa den nu med hjälp av motsvarande logiska räkneregel.
   (c) Samma uppgifter för någon av de'Morgans lagar.
6. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{a, b\}$.
   (a) Räkna upp alla element i den kartesiska produkten $A \times B$.
   (b) Räkna upp alla element i potensmängden, $\mathcal{P}(B)$, av B.
   (c) Hur många element finns det i $\mathcal{P}(A)$ och $\mathcal{P}(\emptyset)$? Hur många finns det i $\mathcal{P}(C)$ om C är en mängd med $n \in \mathbb{N}$ element?

Uppgifter ur boken som rekommenderas för självstudier:

Logik (kapitel 1): 3, 4, 6, 7bfg, 8, 12.

Mängdlära (kapitel 2): 1, 6, 7, 9, 11, 14.