GÖTEBORGS UNIVERSITET
MATEMATIK 1, MMG200, HT2016
INLEDANDE ALGEBRA

Övningshäfte 3: Funktioner och relationer

Övning H

Syftet är att utforska ett av matematikens viktigaste begrepp: funktionen. Du har redan stött på detta begrepp i skolan. Det är viktigt att utgå från sina egna erfarenheter av detta begrepp och härifrån öka precisionen och klarheten av vad som menas med en funktion. Begreppet är betydligt vidare än den bild man vanligen har med sig från gymnasiet.

De viktigaste begreppen i samband med funktioner är:

- definitionsmängd, målmängd och värdemängd
- injektiv, surjektiv och bijektiv
- invers funktion och inverterbarhet
- graf och funktionskurva
- operatorer

1. Vad är en funktion? Vad tänker du att en funktion är? Kan du *definiera* begreppet funktion? Vad är en funktions *definitionsmängd*, *målmängd* samt *värdemängd*? När är två funktioner *lika*?

2. Hitta på exempel på funktioner som har definitionsmängd D och värdemängd V där:

   (a) $D = \{1, 2\}$ och $V = \{3\}$
   (b) $D = \{1, 2\}$ och $V = \{3, 4\}$
   (c) $D = \{1, 2\}$ och $V = \{3, 4, 5\}$
   (d) $D = [0, 1]$ (ett slutet intervall) och $V = \{1, 2\}$
   (e) $D = [0, 1]$ och $V = [0, 1]$
   (f) $D = [0, 1]$ och $V = (0, 1)$ (ett öppet intervall)
   (g) $D = \mathbb{Z}$ och $V = \mathbb{N}$
   (h) $D = \mathbb{N}$ och $V = \mathbb{Z}$
   (i) $D = \mathbb{R}$ och $V = \mathbb{Z}$

   Hur många möjliga funktioner finns det i frågorna (a), (b) och (c)?

3. Vad är det för likheter/skillnader på följande funktioner?

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) = x^2 \\ g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, & g(x) = x^2 \\ h : \mathbb{R} \to [0, \infty), & h(x) = x^2 \\ k : [0, \infty) \to [0, \infty), & k(x) = x^2 \end{array}$$

   Vad är $f(x-1),\ k(x-1),\ g(-x),\ g(x^2)$? För vilka x?

4. Vad är *sammansättningen* av två funktioner? När är sammansättningen av två funktioner definierad? Låt $f(x) = 1/x$ och $g(x) = -(x+1)$ med definitionsmängder $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

   (a) Vad är värdemängderna V_f respektive V_g?

   (b) Vad är $f \circ g$ respektive $g \circ f$?

   (c) Är $f \circ g = g \circ f$?

   (d) Vad händer om vi istället sätter $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och $D_g = \mathbb{R}$?

5. För att illustrera en funktion kan man använda sig av dess *graf*.

   (a) Vad är *grafen till en funktion*?

   (b) Bestäm/rita grafen till funktionerna i uppgift 2 (a) och (b), uppgift 3 samt uppgift 4.

   (c) Har någon av funktionerna en *invers*? Varför/varför inte? Vad är en invers? Hur kan man "se i grafen" huruvida en funktion har invers? Bestäm inversen i de fall den existerar.

   (d) Kan ni hitta en egenskap som är gemensam (och unik) för alla funktioner som har invers?

6. Kolla upp vad som är villkoren för att en funktion ska vara *injektiv* respektive *surjektiv*. Diskutera inom gruppen för att försöka att också få en klar bild av vad de formella definitionerna innebär. Ge nu exempel på vardera en funktion som är

   (a) injektiv men inte surjektiv.

   (b) surjektiv men inte injektiv.

   (c) både injektiv och surjektiv. (Det finns en term som anger precis detta, vilken?)

   (d) varken surjektiv eller injektiv.

   Observera att det är viktigt att ange vilka definitions- och målmängderna är i de fyra exemplen.

7. Av exemplen i förra uppgiften är det precis en funktion som är inverterbar. Vilken och varför?

8. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av $f(x) = |x|$ och $g(x) = x^2$.

   (a) Visa att $f \circ g = g \circ f = g$. Viktigt att tänka över och kunna motivera varje steg i beviset.

(b) Vad är det för fel i följande härledning:

$$f = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_{\mathbb{R}},$$

där $id_{\mathbb{R}}$ är identitetsfunktionen på $\mathbb{R}$?

9. En speciell typ av funktioner (som man oftast kanske inte tänker på som funktioner) är *operatorer* (eller operationer). Svara på nedanstående frågor för följande operatorer:

   - addition på heltalen $\mathbb{Z}$
   - multiplikation på heltalen $\mathbb{Z}$
   - snitt på potensmängden $\mathcal{P}(M)$ av någon mängd M
   - implikation på mängden $\{\text{Sant}, \text{Falskt}\}$
   - sammansättning av funktioner $f : M \to M$ där M är någon mängd

   (a) Motivera kort att de är binära operatorer.

   (b) Vilka är kommutativa?

   (c) Vilka är associativa?

   (d) Vilka har en identitet? Vad är den i så fall?

   (e) Om det finns en identitet, vilka element har i så fall invers och vad är den?

Övning I

Syftet med övningen är att bekanta sig med begreppet *relation* som kan ses som en generalisering av funktion. Speciellt ska vi titta på en viktig klass av relationer, så kallade *ekvivalensrelationer*.

1. Vad är definitionen av en relation? Hur kan en funktion betraktas som en relation? Ge exempel på relationer som inte är funktioner

   (a) från $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{Z}$

   (b) från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

   (c) från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{Z}$

   Sammanfattningsvis så har vi motiverat att relation är en generalisering av begreppet funktion, eller hur?

2. Betrakta de två relationerna $\leq$ och $<$ på $\mathbb{R}$. Skissa relationerna (som delmängder av planet) och jämför. Vad är skillnaden? Kan ni beskriva den egenskap som $\leq$ har men som $<$ saknar, i matematiska termer, utan att referera till skisserna?

3. Nu ska ni jämföra två olika relationer på mängden $M = \{\text{människor på jorden}\}$. Den första är given av att en person A är relaterad till en person B om A är yngre än B. Den andra relationen ges av att A är relaterad till B om de är syskon. Kan ni hitta någon egenskap som den andra relationen har men inte den första? Kan ni beskriva denna egenskap i matematiska termer?

4. Då $3 < 5$ och $5 < x$ så kan man dra en "självklar" slutsats. Vilken? Vad är det för en egenskap som en relation behöver ha för att man ska kunna dra en sådan slutsats? Skriv ner en definition av denna egenskap.

5. I de tre föregående uppgifterna fann ni tre egenskaper som en relation kan ha eller inte ha. Läs nu i boken om reflexivitet, symmetri och transitivitet. Var det dessa egenskaper ni fann? Om inte, diskutera gärna med handledaren vad ni fann.

6. I denna uppgiften gäller det att hitta exempel på relationer med olika egenskaper. Fyll i en tabell enligt mallen nedan där varje möjlig kombination av 'Ja' och 'Nej' ska ingå (totalt 8 stycken).

Reflexiv	Symmetrisk	Transitiv	Exempel på relation
Ja	Ja	Ja	?
Ja	Ja	Nej	?

7. Kolla upp vad en *ekvivalensrelation* är. Exakt ett av era exempel i förra uppgiften är en ekvivalensrelation, vilken? Hitta två exempel till på ekvivalensrelationer.

8. Vad är en ekvivalensklass? Bestäm alla ekvivalensklasser i något av de exempel på ekvivalensrelationer som ni hittat.

9. En *partition* ev en mängd M är en uppdelning av alla element i parvis *disjunkta* delmängder. Vad betyder detta? Ge exempel på partitioner av mängderna
$$\{1,\, 2,\, 3\},\ \mathbb{Z} \text{ och } \mathbb{R}.$$
Hur många olika partitioner av $\{1,\, 2,\, 3\}$ finns det?

10. Begreppen ekvivalensrelation och partition är mycket tätt förknippade. Undersök detta genom att svara på följande två frågor. Om man har en partition, hur kan man då få en ekvivalensrelation? Omvänt, hur ger en ekvivalensrelation en partition?

Övning J

Syftet med övningen är att undersöka hur man kan jämföra storleken, *kardinaliteten*, av olika mängder inklusive sådana med oändligt många element. Centralt är funktionsbegreppet och bijektivitet.

Först lite teori. För en ändlig mängd kan vi tala om hur många element den har genom att helt enkelt räkna dem. I mängden $M = \{x,\, y,\, z\}$ finns det 3 element och vi skriver att $|M| = 3$ och säger att M har kardinaliteten 3. För oändliga mängder, som t ex $\mathbb{N}$ och $\mathbb{R}$, är det inte lika enkelt att tala om "hur många" element de har eller vad "hur många" egentligen ska betyda. (Det är faktiskt ganska svårt och tas upp i vad som kallas axiomatisk mängdteori.) Vi ska här bara diskutera vad det innebär att två mängder har "lika många" element. Vi gör följande definition: En mängd A har *samma kardinalitet* som en mängd B om och endast om det finns en bijektiv funktion $f : A \to B$.

Om ni har ont om tid så gör bara de fyra första uppgifterna.

1. Visa att "ha samma kardinalitet" är en ekvivalensrelation.

2. Visa att $\{x,\ y,\ z\}$ och $\{5,\ 6,\ 7\}$ har samma kardinalitet enligt definitionen.

3. För ändliga mängder innebär "samma kardinalitet" samma sak som det vi intuitivt menar med "lika många element". Varför det?

4. Låt $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ och $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$.

   (a) Visa att $\mathbb{Z}$ och A har samma kardinalitet. (Det finns alltså lika många heltal som det finns jämna heltal!)

   (b) Visa att $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Z}_+$ har samma kardinalitet. (Det finns alltså lika många heltal som det finns positiva heltal!)

   (c) Visa att $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ och $\mathbb{Z}_+$ har samma kardinalitet.

   En mängd M som har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}_+$ säges vara *uppräknelig*. Namnet kommer av att om $f : \mathbb{Z}_+ \to M$ är en bijektiv funktion så får vi en uppräkning av elementen i M genom

   $$m_1 = f(1),\ m_2 = f(2),\ m_3 = f(3), \ldots$$

5. I Hilberts hotell finns det oändligt många rum som är numrerade $1,\ 2,\ 3, \ldots$. (Det finns alltså uppräkneligt många rum.)

   (a) En matematiker får problem med sin inkvartering för när han anländer får han höra att alla rum är upptagna. Han föreslår ägaren att flytta gästerna så att alla inklusive han själv får varsitt rum. Hur skulle det kunna gå till?

   (b) Det kommer en busslast med 50 nya gäster. Hur kan alla få varsitt rum om det redan är fullt?

   (c) Det kommer nu oändligt många nya gäster till det fulla hotellet (uppräkneligt många dock). Hur löser man nu inkvarteringsproblemet i Hilberts hotell? (Tänk på hur ni visade att $\mathbb{Z}$ hade samma kardinalitet som alla jämna heltal.)

6. Visa att de rationella talen $\mathbb{Q}$ är uppräkneliga. (Börja med att visa att mängden av positiva rationella tal är uppräknelig och utnyttja samma idé som när ni visade att $\mathbb{Z}$ var uppräkneligt.) Det finns alltså lika många rationella tal som heltal!

   Ledning: Antag att de är förkortade så mycket som möjligt och ordna dem efter summan av täljare och nämnare.

7. Nu börjar man kanske få känslan att alla oändliga mängder är uppräkneliga, men så är inte fallet. De reella talen $\mathbb{R}$ är **inte** uppräkneliga. Försök bevisa detta. Den förste som gjorde det var Georg Cantor, en av grundarna av den moderna mängdteorin, år 1872. Uppgiften är svår, men inte omöjlig och dessutom rolig!?

   Ledning: Gör ett motsägelsebevis. Antag att $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ är en uppräkning av de reella talen i intervallet $(0, 1)$. Låt a_{in} vara decimalsiffra nummer n i x_i, d v s

   $$x_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots, \text{ för } i = 1, 2, 3 \ldots$$

   Konstruera nu ett tal $x = 0, b_1b_2b_3b_4\cdots$ som inte finns i uppräkningen $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$.

8. Kan du ge en definition av att en mängd är oändlig med hjälp av begreppet "samma kardinalitet".

Uppgifter ur boken som rekommenderas för självstudier:

Kapitel 3: 4, 5, 7, 10, 13, 22, 36, 40, 42