MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2014-04-26 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Timo Hirscher.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.

   (a) Linjen $(x, y, z) = (1 + t, -2 + t, 2t)$ är vinkelrät mot planet $x + 3y - 2z = 7$

   (b) $\lambda = -1$ är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Om matriserna A och B är inverterbara så är $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   (d) En 3×3 − matris har alltid minst en egenvektor.

   (e) Om $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ är linjärt beroende så är också $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ linjärt beroende.

   (f) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = 0$ så är även $2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ en lösning.

   (g) Det finns en 4×7 − matris sådan att kolonnrummet och nollrummet har samma dimension.

   (h) Två icke-parallella egenvektorer till en symetrisk matris måste vara vinkelräta.

2. Visa att om A är en $n \times n$-matris som har n stycken linjärt oberoende egenvektorer så är A diagonaliserbar.

3. Antag $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ är en ortonormalbas i R^p och att $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_p\boldsymbol{u}_p$.
   Härled en formel för koefficienterna c_j uttryckta med hjälp av $\boldsymbol{y}$ och basvektorerna.

4. (a) Bestäm ekvationen får det plan som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$ och $(2, 1, 1)$.

   (b) Bestäm linjen som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(1, 2, 3)$, på parameterform.

5. Lös approximativt med minsta-kvadrat-metoden ekvationssystemet $\begin{cases} x + y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x &= 1 \end{cases}$

6. Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm för varje värde på a kolonnrummets och nollrummets dimension för matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 3 & a & 7 & -1 \\ a & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Bestäm en ON-bas för det underrum till $\boldsymbol{R}^5$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 0, 1)^T$, $(1, 0, 1, 0, 0)^T$ och $(0, 1, 0, 1, 1)^T$.

Lycka till!
Sven