MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2015-04-17 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Anna Persson.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.

   (a) Linjen $(x, y, z) = (1 + t, -2 + t, 2t)$ är vinkelrät mot planet $x - 5y + 2z = 7$

   (b) $\lambda = 2$ är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (d) Om $\boldsymbol{x} \in$ nollrummet till A och $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ så är $\boldsymbol{x}$ en egenvektor till A.

   (e) Om A och B är kvadratiska matriser och AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.

   (f) Om matriserna A och B är inverterbara så är $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   (g) Om A har 3 pivotkolonner så är $\mathrm{Col}(A)$ en delmängd av R^3.

   (h) Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_p}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.

2. (a) Visa att om A är inverterbar så har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en entydig lösning.

   (b) Visa att om A och B är ivnerterbara $n \times n$ − matriser så är också AB inverterbar.

   (c) Visa att nollrummet till en är $m \times n$ − matris är ett undrrum till R^n.

3. Visa att om A är en $n \times n$-matris som har n stycken linjärt oberoende egenvektorer så är A diagonaliserbar.

4. Bestäm ekvationen får det plan som innehåller linjen $\dfrac{x}{2} = y + 1 = \dfrac{z - 2}{3}$ och punkten (1,1,-1).

5. Lös approximativt med minsta-kvadrat-metoden ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ x + y + z & = & 1 \\ 4x + 2y + z & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

6. Bestäm en bas för kolonnrummet och en bas för nollrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ -3 & -6 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

8. En linjär avbildning F i rummet avbildar punkterna $(1, 0, 2)$, $(0, -1, 1)$, och $(1, 1, 0)$ på punkterna $(4, 3, 3)$, $(0, 1, -1)$ respektive $(3, 0, 3)$. Alla punkter är givna med koordinater i en och samma bas. Bestäm avbildningsmatrisen till F.

Lycka till!
Sven