MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2015-08-19 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Tim Gardilin.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.

   (a) Linjen $(x, y, z) = (2t, -2-t, 3+t)$ är vinkelrät mot planet $x + 4y + 2z = 7$

   (b) Två icke-parallella egenvektorer till en symetrisk matris måste vara vinkelräta.

   (c) Om matriserna A och B är inverterbara så är $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   (d) Om $\det A = 0$ så finns egenvektorer till A som ligger i nollrummet till A.

   (e) Om $A = PBP^{-1}$ där P är inverterbar så har A och B samma egenvärden

   (f) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = 0$ så är även $2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ en lösning.

   (g) Om A och B är kvadratiska matriser och AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.

   (h) Om A är en 4×5–matris med 3 pivokolonner så har nollrummet till A dimensionen 2.

2. Antag $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ är en ortonormalbas i R^p och att $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_p\boldsymbol{u}_p$.
   Härled en formel för koefficienterna c_j uttryckta med hjälp av $\boldsymbol{y}$ och basvektorerna.

3. Visa att om $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_p$ är vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ där $p > n$ så är de linjärt beroende.

4. För vilka x är vektorerna $(-1, 4, 0)^T$,$(1, -1, x)^T$ och $(x, 8, 4)^T$ linjärt beroende?

5. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $2x + y + z = 3$ och $x - y + 2z = 3$ på parameterform.

   (b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda två planen och som innehåller punkten $(0, 0, -1)$. .

6. (a) Visa att $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ inte ligger i kolonnrummet till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Lös approximativt med minstakvadratmetoden ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   Bestäm också felvektorn .

7. Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Låt $F(\boldsymbol{u})$ vara den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på det underrum till $\boldsymbol{R}^4$ som spänns av vektorerna $(1, 0, 1, 0)^T$, $(1, 1, 0, 0)^T$ och $(0, 1, 1, 1)^T$. Bestäm avbildningsmatrisen för F.

Lycka till!
Sven