Sats:

Antag A är en symmetrisk $n \times n$ – matris. Då finns en ortogonalmatris P och en diagonalmatris D så att $P^T AP = D$. Kolonnerna i P är då egenvektorerna och diagonalelementen i D är motsvarande egenvärden.

Bevis:

Induktion över n. För $n = 1$ är det trivialt. Vi antar att det gäller för $(n-1)$ – matriser.

Låt λ_1 Vara ett (reellt) egenvärde och $\mathbf{v}_1$ en tillhörande egenvektor. Fyll ut till en ON-bas, $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ och sätt $P_1 = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$.

Första kolonnen i $P_1^T AP_1$ blir då $P_1^T A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 P_1^T \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Men $P_1^T AP_1$ är ju symmetrisk så $P_1^T AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

där B är en symmetrisk $(n-1) \times (n-1)$ – matris. Enligt induktionsantagandet finns då en ortogonalmatris Q och en diagonalmatris D_1 så att $Q^T BQ = D_1$.

Om vi då sätter $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ och $P = P_1 P_2$ så är P en ortogonal-matris och

$$P^T AP = P_2^T P_1^T AP_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = D.$$

Eftersom då $AP = PD$ dvs $A(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

så följer att $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ för $i = 1, \cdots, n$.