

## Dugga 2

### Envariabelanalys, hösten 2016

---

Fel svar = -1 P. Rätt svar ge antecknat poäng. Total poäng blir maximum av noll och poäng som ni har fått på duggan. Maximum är 20P total, minimum är 0P total.

---

**Skriv ditt namn:** Julie Rowlett

---

1. (3P) Formulera differentialkalkylens medelvärdessats: Antag att  $f$  är kontinuerlig i  $[a, b]$  och differenzierbar i  $]a, b[$ . Sedan  $\exists c \in ]a, b[$  med

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. Antag att  $g$  är en begränsad funktion i intervallet  $[-1, 1]$  och att:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

- (a) (1P) Beräkna:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$

Beräknat: gränsvärdet är 0.

- (b) (3P) Bevisa svaret till det svar du kom fram till i (a). Bevis: Låt  $\epsilon > 0$ . Därför att  $g$  är begränsad i  $[-1, 1]$  finns det  $C \in \mathbb{R}$  med  $C \geq 0$  och

$$|g(x)| \leq C \forall x \in [-1, 1].$$

Därför att  $f$  konvergerar mot 0 när  $x \rightarrow 0$ , finns det  $\delta > 0$  med

$$|x - 0| < \delta \implies |f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{C + 1}.$$

Sedan har vi

$$|x - 0| < \delta \implies |f(x)g(x) - 0| < \frac{\epsilon}{C + 1}C < \epsilon.$$

Vi har bevisat att  $f(x)g(x)$  konvergerar mot 0 när  $x \rightarrow 0$ .

Rita grafen till funktioner med följande egenskaper om det är möjligt. Om det inte är möjligt, skriv att det är omöjligt.

3. (1P) Kontinuerlig i  $[-1, 1]$  men inte deriverbar i punkten 0; t.ex.  $f(x) = |x|$ .  
4. (1P) Kontinuerlig i  $[-1, 0[$  och i  $]0, 1]$  men inte kontinuerlig i punkten 0; t.ex.  $f(x) = 1/x$ .

5. (1P) Deriverbar i  $] - 1, 1[$  men inte kontinuerlig i punkten 0; OMÖJLIGT!!!
6. (1P) Kontinuerlig och deriverbar i  $] - 1, 0[$  och i  $]0, 1[$  men varken kontinuerlig eller deriverbar i punkten 0. samma svar som i uppgift 4 funkar.

Beräkna:

7. (1P)  $\frac{d}{dx} (x^2 \sin(\cos(e^x))) = 2x \sin(\cos(e^x)) + x^2 \cos(\cos(e^x))(-\sin(e^x))e^x$
8. (1P)  $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln |1+x| + c$
9. (1P)  $\int \frac{e^{\ln(x)}}{x} dx = x + c$
10. (1P)  $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (\ln |1-x| - \ln |1+x|)$
11. (1P)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^2) + \arctan(x^{-2}) = 0$
12. Låt  $x_1 = 1$  och  $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ .
- (a) (1P) Konvergerar följden  $(x_n)$  när  $n \rightarrow \infty$ ? Ja.
- (b) (1P) Om följden konvergerar, bestäm gränsvärdet, om inte, förklara varför. Konvergerar mot  $\sqrt{2} - 1$ .
13. (1P) Låt  $f$  vara en deriverbar funktion från mängden  $[0, 1]$  till mängden  $\mathbb{R}$ . Vad är **omöjligt**?
- (a)  $f$  är bijektiv : omöjligt
- (b)  $f$  är injektiv
- (c)  $f$  är surjektiv : omöjligt
14. (1P) Låt  $f$  vara en deriverbar funktion från mängden  $]0, 1[$  till mängden  $\mathbb{R}$ . Vad är **omöjligt**? Ingen av dem är omöjligt.
- (a)  $f$  är bijektiv
- (b)  $f$  är injektiv
- (c)  $f$  är surjektiv