Envariabelsanalys del II MP, ht2016, Föreläsning 2.1

Repetition:

- **Definition:** Φ trappfkn. på $[a,b]$ om $\Phi(x) = c_k$ $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$ där $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$I(\Phi) = \int_a^b \Phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

- **Definition:** f godt. fkn.

$\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi);\ \Psi \text{ trappfkn. } \Psi \geq f\}$ overintegr. av f

$\underline{I}(f) = \sup\{I(\Phi);\ \Phi \text{ trappfkn. } \Phi \leq f\}$ underintegralen av f

- **Definition:** f begr. fkn. på $[a,b]$

Om $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ så f (Riem.-) integrerbar och

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f).$$

- **Sats:** f integrerbar

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ trappfkner. Φ, Ψ ; $\Phi \leq f \leq \Psi$ & $I(\Psi) - I(\Phi) < \varepsilon$.

- **Sats:** Om f begr. på $[a,b]$ och $[a,b]$ kan delas upp i ändligt många intervall där f är monoton, så är f integrerbar.

- **Ex.** $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ på $[0,1]$ ej integrerbar

- **Sats:** Om f styckvis kont. på $[a,b]$ så f integrerbar på $[a,b]$

- <u>Definition</u>: f kont. på $[a,b]$, $D: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$\ell(D) = \max_k (x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ godt. } \forall k.$$

Summan

$$R_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kallas för en <u>Riemann-summa</u>.

- <u>Sats</u>: $R_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow[\ell(D)\to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx$

- <u>Sats</u>: f, g int. bara på $[a,b] \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha \cdot f,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ f+g \end{array}$ int. bara på $[a,b]$

I. $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

II. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

III. $f(x) \leq g(x)$ på $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

IV. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(Vi definierar $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ så IV gäller $\forall c$)

<u>Idag</u>:

* Integralkalkylens medelvärdessats
* Analysens huvudsats
* Insättningsformeln
* Partiell integration & variabelsubstitution.

Vi börjar dock med:

Sats: (Δ-olikheten för integraler) Om f är integrerbar på $[a,b]$ så gäller att

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Bevis: Vi bevisar detta endast för styckvis kontinuerliga funktioner (se stencil för allmänna fallet)

f styckvis kont. $\Rightarrow |f|$ styckvis kontinuerlig

$\Rightarrow |f|$ integrerbar

Vi har att: $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$

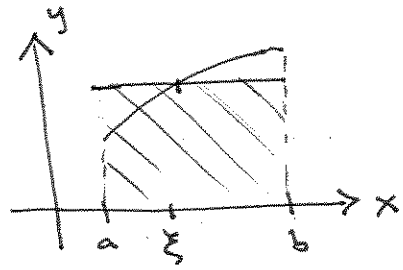
$$\overset{\mathrm{I},\,\mathrm{III}}{\Longrightarrow} \pm\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \iff$$

$$\iff \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \blacksquare$$

Vi vill visa att integraler kan beräknas m.h.a. primitiva funktioner. För detta behöver vi följande viktiga sats:

Sats: (Integralkalkylens medelvärdessats) Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så $\exists\, \xi \in [a,b]$ s.a.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$



Bevis: Låt

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

så $\quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b] \quad \overset{III}{\Longrightarrow}$

$$\overset{III}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{C \text{ konstant}} \leq M$$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq C \leq M \\ f \text{ kont.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Satsen om mellanliggande värde} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in [a,b] \;;\; f(\xi) = C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, \xi \in [a,b] \;;\; \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad \blacksquare$$

<u>Ex.</u> Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+2} \arctan(x)\,dx$

<u>Lösn.</u>: Integralkalkylens medelvärdessats ger att:

$$\exists\, \xi_n \in [n, n+2] \;;\; \int_n^{n+2} \arctan(x)\,dx = \arctan(\xi_n)(\cancel{n}+2-\cancel{n})$$

$$n \leq \xi_n \leq n+2 \quad \text{så} \quad n \to \infty \Rightarrow \xi_n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+2} \arctan(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2\arctan(\xi_n) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Med hjälp av Integralkalkylens medelvärdessats kan vi nu (äntligen!) bevisa:

<u>Sats</u>: (Analysens huvudsats) Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$ och låt

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in [a,b]$$

Då är funktionen S deriverbar och

$$S'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

<u>Bevis:</u> Vi studerar differenskvoten

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \{\text{integralkalkylens medelvärdessats}\} =$$

$$= \frac{1}{h} f(\xi_h)(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = \frac{1}{\cancel{h}} f(\xi_h)\cdot\cancel{h} = f(\xi_h)$$

för något $\xi_h \in [x, x+h]$.

$x \leq \xi_h \leq x+h$ så $h \to 0 \Rightarrow \xi_h \to x$

f kontinuerlig så $\xi_h \to x \Rightarrow f(\xi_h) \to f(x)$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x) \qquad \blacksquare$$

<u>Ex.</u> $\frac{d}{dx}\int_a^x e^{-t^2}\,dt \overset{\text{♕}}{=} e^{-x^2}$ så $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ primitiv funktion till e^{-x^2}. Men man kan visa att $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ inte kan uttryckas i termer av trigonom. funktioner.

<u>Obs!</u> f måste vara kont. för att ♕ ska gälla.

Man kan t.ex. visa att $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } x<0 \\ 1 & \text{då } x \geq 0 \end{cases}$ inte har en primitiv fkn.

<u>Ex.</u> Beräkna $f'(t)$ om $f(t) = \int_0^{2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$

<u>Lösn.</u>: Låt $S(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du$. Då $f(t) = S(2\sqrt{t})$

$$f'(t) = S'(2\sqrt{t}) \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$S'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow S'(2\sqrt{t}) = e^{-4t}$$

$$\therefore f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-4t}$$

<u>Korollarium</u>: (Insättningsformeln) Om f kont. i $[a,b]$ och F primitiv funktion till f så

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

<u>Bevis</u>: Vet att F primitiv till f

Men $\Rightarrow S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ också primitiv till f

$\Rightarrow S'(x) = F'(x)$ på $[a,b]$ $\Rightarrow$ {Sats 3.15} $\Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ konstant, $\forall x \in [a,b]$

<u>$x=a$</u>: $S(a) = F(a) + C \Leftrightarrow \{ S(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(a) + C = 0 \Leftrightarrow C = -F(a)$

$\therefore S(x) = F(x) - F(a)$

<u>$x=b$</u>: $S(b) = F(b) - F(a) \Leftrightarrow \{ S(b) = \int_a^b f(x)\,dx \}$

$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ∎

Alltså har vi överfört beräkning av integraler (dvs area under grafen - jobbigt!) till beräkning av primitiva funktioner (dvs anti-derivator - betydligt mindre jobbigt!!)

<u>Ex.</u> $\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$

Betydligt enklare än m.h.a. Riemann-summor!!

<u>Ex.</u> Beräkna arean mellan x-axeln och kurvan

$$y = \frac{x+1}{x+2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

<u>Lösn.:</u> $\int_1^2 \frac{x+1}{x+2} \, dx = \int_1^2 \frac{x+2-1}{x+2} \, dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx =$

$= \left[x - \ln|x+2| \right]_1^2 = 2 - \ln|4| - (1 - \ln|3|) =$

$= 1 + \ln\left(\frac{3}{4}\right).$

Partiell integration och variabelsubstitution (viktiga verktyg för beräkning av primitiva funktioner) kan nu formuleras för integraler:

<u>Partiell integration:</u>

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \left[F(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x) g(x) \, dx$$

<u>Variabelsubstitution:</u> Om g injektiv och deriverbar så

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad \text{där} \quad \begin{array}{l} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{array}$$

<u>Ex.</u> Beräkna $\displaystyle\int_2^3 x^3 e^{x^2}\,dx$

<u>Lösn.</u>: $$\int_2^3 x^3 e^{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t,\ x > 0 \\ 2x\,dx = dt \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 4 \\ x = 3 \Leftrightarrow t = 9 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_4^9 t e^t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[t e^t \right]_4^9 - \int_4^9 e^t\,dt \right) = \frac{1}{2}\left(9e^9 - 4e^4 - \left[e^t \right]_4^9 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9e^9 - 4e^4 - (e^9 - e^4) \right) = \frac{1}{2}\left(8e^9 - 3e^4 \right)$$