MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**
Göteborgs Universitet | Datum: 2017-04-20 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 5325

MMG200 Envariabelsanalys
Lösningar

1. (a) Formulera och bevisa analysens fundamentalsats. Lösningen finns i boken!

(b) Beräkna derivatan av

$$-\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Vi använder analysens fundamentalsats. Funktionen

$$\int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}dt$$

har derivatan

$$\sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x).$$

och funktionen

$$\int_{\cos(x)}^0 \sqrt{1-t^2}dt = -\int_0^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}dt$$

har derivatan

$$\sin(x)\sqrt{1-\cos(x)^2}.$$

Använder vi lineariteten till att skriva om integralen som

$$-\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}dt - \int_0^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}dt$$

så får vi alltså

$$\sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x) + \sin(x)\sqrt{1-\cos(x)^2}.$$

Då slutligen $0 < x < \pi/2$ har vi att

$$\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x), \quad \sqrt{1-\cos(x)^2} = \sin(x)$$

så det blir

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Wow!

2. Beräkna följande gränsvärden om de existerar

(i) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(2x)}{x^2-\pi^2}$ Vi får använda l'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(\sin(2x))'}{(x^2-\pi^2)'} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos(2x)}{2x} = \frac{2}{2\pi}.$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^6+x^3+1}-\sqrt{x^6-x^3+1}$ Vi förlänger med konjugatet:

$$\sqrt{x^6+x^3+1}-\sqrt{x^6-x^3+1} = \left(\sqrt{x^6+x^3+1}-\sqrt{x^6-x^3+1}\right)\frac{\sqrt{x^6+x^3+1}+\sqrt{x^6-x^3+1}}{\sqrt{x^6+x^3+1}+\sqrt{x^6-x^3+1}}$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{x^6+x^3+1}+\sqrt{x^6-x^3+1}} \longrightarrow -2 \text{ om } x\to-\infty.$$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-\sin(x)}{x^3\cos(x)}$ Vi använder l'Hopital igen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{x^3\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos(x)}{3x^2\cos(x)-x^2\sin(x)}$$

och en gång till:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}-\sin(x)}{6x\cos(x)-3x^2\sin(x)-2x\sin(x)-x^2\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x^2)^2}-\frac{\sin(x)}{x}}{6\cos(x)-3x\sin(x)-2\sin(x)-x\cos(x)} = \frac{-3}{6}.$$

3. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\sin(x)+\cos^2(x)}.$$

Vi skriver

$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin(x)+\cos^2(x)}dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)+\cos^2(x)}dx.$$

Gör vi variabelsubstitutionen $u=\sin(x)$, altså $du=\cos(x)dx$, får vi:

$$\int 2\frac{udu}{1+u+(1-u^2)} = -2\int\frac{udu}{u^2-u-2} = -2\int\frac{udu}{(u-2)(u+1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{u}{(u-2)(u+1)} = \frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+1}, \quad A(u+1)+B(u-2)=u,$$

alltså

$$A+B=1, \quad A-2B=0 \implies B=1-A \text{ och } A-2(1-A)=0 \implies 3A=2 \implies A=2/3,\ B=1/3.$$

Sammantaget har vi

$$-2\int\frac{2/3}{u-2}+\frac{1/3}{u+1}du = -2\left(\frac{2}{3}\ln|u-2|+\frac{1}{3}\ln|u+1|\right)+C.$$

Med $u=\sin(x)$ får vi slutligen svaret

$$-\frac{4}{3}\ln|\sin(x)-2|-\frac{2}{3}\ln|\sin(x)+1|+C.$$

4. Beräkna alla extrempunkter av $f(x) = \cos(e^x - 1)$ med $x \in \mathbb{R}$.

Vi vet att maximum av $\cos(t)$ finns när $t = 2\pi n$ med $n \in \mathbb{Z}$. Så vi letar efter

$$e^x - 1 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi vet att $e^x > 0$ alla $x \in \mathbb{R}$. Altså

$$e^x - 1 > -1 > -\pi \implies e^x - 1 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}.$$

Då har vi

$$e^x = 1 + 2\pi n \implies x = \log(1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sedan vi vet att $\cos(t)$ har minimum när $t = (2n+1)\pi$ med $n \in \mathbb{Z}$. Då $e^x - 1 > -1 > -\pi$, vi hittar

$$e^x - 1 = (2n+1)\pi \iff e^x = 1 + (2n+1)\pi \iff x = \log(1 + (2n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Beräkna arean av det begränsade område som avgränsas av parabeln $y = 2x - x^2$ och den räta linjen $x + y = 0$.

Kurvorna möts i de punkter där $2x - x^2 = -x$, alltså

$$3x = x^2 \iff x(x-3) = 0 \implies x = 0 \text{ och } x = 3.$$

Arean blir härmed

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x)dx = \left(3x^2/2 - x^3/3\right)_{x=0}^{x=3} = \frac{3^3}{2} - \frac{3^3}{3}.$$

6. Lös differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (x+1)e^x.$$

(i) **Homogenlösning:** Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2r - 3 = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = -3$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}, \text{ där } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) **Partikulärlösning:** Låt $y(x) = z(x)e^x \implies y'(x) = z'(x)e^x + z(x)e^x$,

$$y''(x) = z''(x)e^x + z'(x)e^x + z'(x)e^x + z(x)e^x = (z''(x) + 2z'(x) + z(x))e^x.$$

Vi får alltså att,

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (z''(x) + 4z'(x))e^x = \{\text{Vi vill}\} = (x+1)e^x.$$

För att lösa ekvationen $z''(x) + 4z'(x) = x + 1$ ansätter vi $z(x) = x(Ax + B)$ för några konstanter $A, B \in \mathbb{R}$. Detta ger,

$$z''(x) + 4z'(x) = 2A + 8Ax + 4B = x + 1.$$

Koefficientidentifikation ger $A = 1/8$ och $B = 3/16$, så

$$z(x) = x(\frac{1}{8}x + \frac{3}{16}) \implies y_p(x) = \frac{x}{16}(2x+3)e^x.$$

Sammantaget får vi alltså lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{16}(2x+3)e^x.$$

7. Komplexa tal:

(a) Skriv $7e^{i\pi} + 2e^{i\pi/2} + \frac{2}{1+i}$ som $a + ib$ med $a \in \mathbb{R}$ och $b \in \mathbb{R}$.
Vi använder Eulers formel:

$$7e^{i\pi} + 2e^{i\pi/2} + \frac{2}{1+i} = -7 + 2i + \frac{2(1-i)}{2} = -7 + 2i + 1 - i = -6 + i.$$

(b) Hitta alla lösningar i $\mathbb{C}$ till ekvationen: $z^3 + 27 = 0$.
Euler igen:

$$z^3 = -27 = 3^3(e^{i\pi + 2ik\pi}) \implies z = 3e^{i\pi(1+2k)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

8. Bevisa att om $\lim f(x) = M$ och $\lim g(x) = L$, så gäller att

$$\lim f(x)g(x) = ML.$$

Finns i boken!

Julie och Hossein