MATEMATIK
Göteborgs universitet

DATALAB 1

Envariabelanalys, hösten 2016

Redovisa dina svar (och i förekommande fall även lösningar) på uppgifterna på separat papper. Utskrifter av plottar skall bifogas.
Sista inlämningsdag: 1 november

Syftet med denna lab är att med MATLABs hjälp numeriskt försöka lösa ekvationen

$$x^2 - \frac{\pi^2 - 4}{4\pi}x + \frac{3}{4} - \tan(x) = 0 \tag{1}$$

i intervallet $[0, \pi/2)$.

Försök 1
Vårt första försök baserar sig på iterationsmetoden som är beskriven först i avsnitt 4.5. Vi börjar med att skriva om (1) som

$$x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}(x^2 + \frac{3}{4} - \tan(x))$$

och vi betecknar funktionen definierad av uttrycket på höger sida med $F(x)$.

Uppgift 1: Implementera funktionen $F(x)$ i MATLAB genom att skapa en .m-fil med namnet "strangefunct" och innehållet

```
function y=strangefunct(x)
c=4*pi/(pi^2-4);
y=c*(x.^2+3/4-tan(x));
```

Uppgift 2: Använd MATLAB för att rita kurvorna $y = x$ och $y = F(x)$ i samma figur. Lös grafiskt av ett första närmevärde x_1 på lösningen till $x = F(x)$.

```
>> x=linspace(0, 1.4);
>> f=x;
>> g=strangefunct(x);
>> plot(x, f, 'blue', x, g, 'green')
```

Vi bildar en talföljd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ genom att rekursivt definiera

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uppgift 3: Bevisa (teoretiskt) att om $\lim_{k\to\infty} x_k = r$ och $r \in [0, \pi/2)$ så är r en lösning till (1), dvs. r uppfyller $r = F(r)$.

Uppgift 4: Beräkna $x_1, x_2, \ldots, x_{60}$. (Redovisa endast $x_{51}, \ldots, x_{60}$.) Tror du att följden konvergerar? (Ditt svar beror på hur väl du valt x_1.) Om följden verkar konvergera, ge ett närmevärde på gränsvärdet.

```
>> x1=...                  %Ditt grafiskt avlasta narmevarde
>> x2=strangefunct(x1)
>> x3=strangefunct(x2)
>> x4=strangefunct(x3)
...
...
```

eller smidigare:

```
>> x=zeros(60,1);          %Kolonnvektor med 60 st nollor
>> x(1)=...;               %Ditt grafiskt avlasta narmevarde
>> for i=1:60              %Bygg rekursivt upp din talfoljd
x(i+1)=strangefunct(x(i));
end
>> format long             %Visa manga decimaler
>> x
```

Uppgift 5: Rita derivatan av $F(x)$ på intervallet $[0,1]$ och ge en *kort* motivering till varför talföljden $\{x_k\}$ uppför sig som den gör? *Tips*: Se sats 4.5.3 i boken.

```
>> x=linspace(0, 1);
>> c=4*pi/(pi^2-4);
>> Fprim=c*(2*x - 1./(cos(x)).^2);     %Derivatan av F
>> plot(x, Fprim)
```

Försök 2 (Intervallhalveringsmetoden)
Om denna metod kan du läsa i avsnitt 2.5.2 i boken. Betrakta ekvation (1) och beteckna funktionen definierad av vänsterledet med $f(x)$; vi söker alltså lösningar till $f(x) = 0$. Vi börjar med att implementera f genom att skapa en .m-fil med namnet "nyfunk" och innehållet:

```
function y=nyfunk(x)
cinv=(pi^2-4)/(4*pi);
y=x.^2 - cinv*x + 3/4 - tan(x);
```

Uppgift 6: Beräkna $f(0.5)$ och $f(1.5)$ och motivera att det finns en lösning till $f(x) = 0$ i intervallet $[0.5, 1.5]$. Uppskatta också ett närmevärde på lösningen med ett fel som inte överstiger halva intervallängden (= 1/2).

```
>> nyfunk(0.5)
>> nyfunk(1.5)
```

Uppgift 7: Beräkna $f(1)$ och avgör vilket/vilka av intervallen $[0.5, 1]$ och $[1, 1.5]$ som innehåller lösning till (1). Uppskatta också ett nytt närmevärde på lösningen med ett fel som inte överstiger 1/4.

Denna procedur kan förstås upprepas och varje gång stänger vi in lösningen i ett intervall som är hälften så långt som det tidigare intervallet. Upprepar vi tillräckligt många gånger får vi alltså ett närmevärde på lösningen med så många korrekta decimaler vi vill.

Uppgift 8: Skapa en .m-fil med följande innehåll och använd den för att lösa ekvation (1) med fem korrekta decimaler.

```
function r=intervallhalv(tol)          %tol ar toleransen du bestammer
 intervallstart  = 0.5;
 intervallslut   = 1.5;
```

```
intervallangd = intervallslut - intervallstart ;
while intervallangd/2 > tol
    if nyfunk( intervallstart )*nyfunk( intervallstart + intervallangd/2) <= 0
        intervallslut = intervallstart + intervallangd/2;
    else
        intervallstart = intervallstart + intervallangd/2;
    end
    intervallangd = intervallangd/2;
end
r= intervallstart + ( intervallslut - intervallstart )/2;
```

Uppgift 9: Multiplicera din lösning med 4. Känns talet igen? Vad tror du är den exakta lösningen till ekvation (1)? Verifiera med direkt insättning! Jämför med svaret du fick på uppgift 4.

Försök 3 (Newton-Raphsons metod)
Vi har ju redan lyckats lösa ekvation (1) men vi illustrerar även hur Newton-Raphsons metod funkar; du kan läsa om den i avsnitt 4.5 i boken.

Vi vill alltså lösa ekvationen $f(x) = 0$ där f är funktionen definierad av vänsterledet i (1); i MATLAB har vi tillgång till f via .m-filen ”nyfunk”. Låt x_1 vara din första approximation av lösningen från Försök 1. Enligt Taylors sats är

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

om x är nära x_1. Istället för att lösa $f(x) = 0$ löser vi $f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) = 0$. Detta är enkelt och vi får lösningen

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Förhoppningsvis är x_2 en bättre approximation av lösningen än x_1.

Uppgift 10: Beräkna derivatan, f', av f och implementera den genom att skapa en .m-fil med namnet ”nyfunkprim”. Beräkna x_2.

```
function y=nyfunkprim(x)
cinv=(pi^2-4)/(4*pi);
y=...;                    %Fyll i ditt uttryck for f'
```

Vi definierar en talföjd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ rekursivt genom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uppgift 11: Bevisa att om $\lim_{k\to\infty} x_k = r$ så är r en lösning till $f(x) = 0$.

Uppgift 12: Beräkna $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$, t.ex. med någon av procedurerna beskrivna i Försök 1. Verkar talföljden konvergera? Hur många iterationer behöver du göra för att lösa ekvation (1) med fem decimalers noggrannhet? Jämför med ditt svar på uppgift 4!