Envariabelanalys, MMG200
Laboration 2: Numerisk integration

Laborationens syfte är att:

- Studera några olika metoder att approximera en integral med en summa.
- Tillverka en funktionsfil i MATLAB för dessa metoder.
- Jämföra metoderna genom att testa dem på två exempel.
- Undersöka MATLAB-kommandot `integral` för integralberäkning.

Bakgrund

Läs om rektangel- och trapetsuppskattningar i Persson-Böiers: *Analys i en variabel*, §7.11. Gå också igenom Simpsons formel.

Uppgift 1

Skriv tre funktionsfiler `rekt(f,a,b,n)`, `trap(f,a,b,n)` och `simpson(f,a,b,n)` som beräknar en integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

med hjälp av rektangelmetoden, trapetsformeln respektive Simpsons formel. Indata skall vara en funktion, integrationsgränser samt antalet delintervall. Ut ska komma integralens approximativa värde. Observera att hela beräkningen med fördel görs utan loopar - arbeta istället med vektorer.

Uppgift 2

En enkel integral

Låt oss nu testa metoderna från Uppgift 1 på integralen

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

(a) Beräkna integralen exakt.

Beräkna integralen numeriskt med hjälp av:

(b) Rektangelmetoden (dvs Riemann-summor).

(c) Trapetsmetoden.

(d) Simpsons formel.

Testa med olika n (antal delintervall). Jämför med det exakta värdet. Hur stort behöver n vara för att felet skall bli litet i de olika metoderna? (Se avsnittet **Redovisning** nedan för vad som behöver redovisas i rapporten.)

Uppgift 3

En svår integral

Man kan visa att

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

I förra uppgiften såg du (eller hur?) att Simpsons formel var bäst av de tre numeriska metoderna. Försök nu att beräkna denna integral genom att använda Simpsons formel på

$$\int_0^N \frac{\sin x}{x} dx,$$

för lämpligt N. (**Varning!** Du kan få problem nära 0.)

Uppgift 4

Verktyg för integralberäkning i MATLAB

Undersök MATLAB-kommandot `integral` för integralberäkning. Denna utnyttjar en avancerad integralapproximation med adaptiv intervallindelning, dvs intervallängden görs extra liten där integranden är besvärlig (t ex varierar mycket). Hur fungerar `integral` på den svåra integralen i uppgift 3?

För den intresserade

Det är inte självklart att integralen i uppgift 3 är konvergent. Omskrivning med partiell integration ger

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

vilket visar att den är det. (Varför då? Träna på uppskattningar!! :))

Kan denna omskrivning förbättra den numeriska beräkningen?
Är det någon idé att partialintegrera fler gånger?

Redovisning

Uppgift 1. MATLAB-koden för rektangelmetoden och trapetsmetoden.

Uppgift 2. Storleken på n för att felet är högst 10^{-3}. (Beräkna hur stort n måste vara teoretiskt med Sats 2 avsnitt 7.11, och verifiera sedan detta numeriskt.) Storleken på felen då $n = 10^3$.

Uppgift 3. Vilka N och n valde du? Hur stort blev felet?

(Uppgift 4 behöver inte redovisas, men det är starkt rekommenderat att du bekantar dig med kommandot `integral` som är mycket användbart.)