

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.

Datum: 2018-01-02.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Olof Giselsson 031-772 5325, Examinator nås på: 031-772 5303.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

1. (a) Ge definitionen av att en mängd R med en addition och en multiplikation är en kropp (utan att referera till begreppet ring).
(b) Ge ett exempel på en ring som *inte* är en kropp. Motivera ditt svar. (3p)
2. Formulera och bevisa aritmetikens fundamentalsats. (4p)
3. Formulera definitionerna av att en funktion är injektiv respektive surjektiv. (2p)
4. Vad är entalssiffran i 2017^{2018} respektive 2018^{2017} ? (3p)
5. Vi definierar en rekursiv talföljd a_n för $n \in \mathbb{N}$ genom

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \text{ för } n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att $a_n = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

Var god vänd!

6. En standardkortlek (utan jokrar) innehåller 52 kort. Dessa består av 4 olika färger (klöver, ruter, hjärter och spader) som samtliga innehåller 13 olika valörer (2-10 + knekt, dam, kung och ess i den storleksordningen). Det finns alltså 4 olika tvåor, 4 olika treor, etc. En pokerhand består av 5 stycken kort och i en sådan spelar ordningen mellan korten ingen roll. Hur många olika pokerhänder finns det med korten i en standardkortlek utan jokrar som innehåller
- (a) ett fyrtal, d v s fyra av korten av samma valör?
 - (b) en stege, d v s alla fem kortens valörer i följd t ex 3-4-5-6-7 men INTE alla korten i samma färg (då kallas det färgstege eller straight flush)? Observera att ess räknas i detta fallet både som högst och lägst så både ess-2-3-4-5 och 10-knekt-dam-kung-ess är godkända. Däremot är det inte tillåtet att gå förbi ess som t ex kung-ess-2-3-4.
 - (c) en färg, d v s alla fem korten i samma färg, men inte färgstege d v s valörerna inte dessutom i följd?

Svaren måste motiveras. För att få full poäng ska man räkna ut svaren som heltal.

Observera att färgen spelar roll, d v s en hand som innehåller t ex klöver, ruter och hjärter två (och inte spader två) kan aldrig vara samma hand som en som innehåller klöver, ruter och spader två (och inte hjärter två). (4p)

7. Låt f_n vara antalet följderna av längd n av siffrorna 1, 2 och 3 sådana att det ingenstans i följderna finns en delföljd som ser ut som 123. Alltså är 13213 godkänd medan 11233 inte är det, eftersom andra, tredje och fjärde siffran bildar just 123. Finn en rekursiv formel för följderna f_1, f_2, f_3, \dots (3p)

8. (a) Visa att om x och m är naturliga tal så gäller att $x+1$ delar $x^{2m+1}+1$.
 Tips: Betrakta den geometriska summan $\sum_{r=0}^{2m} (-x)^r$.
- (b) Visa att om $2^k + 1$ är ett primtal så är $k = 2^n$ för något heltal n .
 Tips: Sätt $k = s(2m+1)$ och utnyttja första deluppgiften med $x = 2^s$. (3p)

Tentorna beräknas vara färdiggrättade senast den 20 januari. Skrivningarna kan granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL!

Stefan.