MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2017-10-23.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Stefan Lemurell, 031-772 5303.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Formulera och bevisa binomialsatsen. (3p)

2. Ge definitionerna av att en relation är symmetrisk, reflexiv respektive transitiv samt att den är en ekvivalensrelation. (Totalt fyra definitioner alltså.) Ge också ett exempel på en ekvivalensrelation på de positiva heltalen ($\mathbb{Z}_+$), som är sådan att den har oändligt många olika ekvivalensklasser som alla innehåller oändligt många positiva heltal. (3p)

3. Låt a och b vara heltal sådana att $sgd(a, b) = 1$ och låt c vara ett tredje heltal. Visa att om $a \mid bc$, så gäller att $a \mid c$. (3p)

4. Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen $1113x + 303y = 15$, d v s hitta alla heltalslösningar till ekvationen. (3p)

5. (a) Hur många olika "ord" (d v s bokstavspermutationer) med 9 bokstäver kan man bilda av bokstäverna i KATASTROF?

   (b) Hur många av permutationerna i första deluppgiften har inte två likadana bokstäver bredvid varandra?

   För full poäng krävs att man svarar med explicita heltal, d v s alla eventuella fakulteter och andra symboler ska vara uträknade. Räkningarna ska också motiveras. (4p)

6. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$
för alla positiva heltal n. (3p)

Var god vänd!

7. Låt D_n vara mängden av alla binära talföljder av längd n, d v s ett element i D_n ser ut som

$$\mathbf{a} = a_1 a_2 \ldots a_n \text{ där } a_i \in \{0, 1\} \text{ för } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vi definierar en binär operator $\star$ på D_n genom

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ med } c_i = 0 \text{ om } a_i = b_i \text{ och } c_i = 1 \text{ annars.}$$

Exempelvis får man (i D_6)

$$100101 \star 001101 = 101000.$$

Visa att $(D_n, \star)$ är en abelsk grupp (oavsett vad n är). (3p)

8. Visa att det finns oändligt många primtal på formen $4n - 1$ där $n \in \mathbb{N}$. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 13 november. Ett granskningstillfäller kommer att meddelas på kurshemsidan. Därefter kan skrivningar granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.