MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2016-08-17 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Mattias Lennartsson , ankn. 5325 .

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.

   (a) Ekvationssystemet $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ har alltid entydig lösning.

   (b) Det finns en $3 \times 5 -$ matris sådan att kolonnrummet och nollrummet har samma dimension.

   (c) Om $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^3$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.

   (d) Om A är en $5 \times 7 -$ matris så har $\text{Nul}(A)$ dimension > 0.

   (e) Om AB är kvadratisk så är A och B också kvadratiska.

   (f) Om A saknar egenvärde så är $\det A \neq 0$.

   (g) $\lambda = 0$ är ett egevärde till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (h) Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Antag $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ är en ortonormalbas i R^p och att $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_p\boldsymbol{u}_p$.
   Härled en formel för koefficienterna c_j uttryckta med hjälp av $\boldsymbol{y}$ och basvektorerna.

3. (a) Visa att nollrummet till en är $m \times n -$ matris är ett undrrum till R^n.

   (b) Visa att kolonnrummet till en $m \times n -$ matris är ett underrum till $\boldsymbol{R}^m$.

   (c) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n -$ matriser så är också AB inverterbar.

4. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x + 2y - z = 2$ och $3x + y + 2z = 1$ på parameterform.

   (b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda två planen och som innehåller punkten $(-2, 3, -1)$. .

5. Givet vektorerna $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (x, -1, 1)$ och $\mathbf{c} = (1, 1, x)$. För vilka värden på x är mängden $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linjärt beroende? Samma fråga för mängderna $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, och $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.

6. (a) Visa att $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ inte ligger i kolonnrummet till $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Lös approximativt med minstakvadratmetoden ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   Bestäm också felvektorn .

7. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Låt $F(\boldsymbol{u})$ vara den rätvinkliga projektionen av $\boldsymbol{u}$ på planet $x + y = 0$ och låt $G(\boldsymbol{u})$ vara den rätvinkliga projektionen av $\boldsymbol{u}$ på planet $x+z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för $H(\boldsymbol{u}) = G(F(\boldsymbol{u}))$ i standardbasen.

Lycka till!
Sven