MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2016-12-22 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Mattias Lennartsson , ankn. 5325 .

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.

   (a) Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Om A och B är kvadratiska matriser och AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.

   (c) Om $\mathrm{Col}(A)$ och $\mathrm{Nul}(A)$ har dimension 3 respektive 2 så är $\mathrm{Col}(A)$ en delmängd av R^5.

   (d) Det finns en 4×7 – matris sådan att kolonnrummet och nollrummet har samma dimension.

   (e) Om $\mathrm{Nul}\, A$ och $\mathrm{Col}\, A$ har samma dimension så måste A vara kvadratisk.

   (f) Om A saknar egenvärde så är $\det A \neq 0$.

   (g) Om $A = PBP^{-1}$ där P är inverterbar så har A och B samma egenvärden.

   (h) Om kolonnrummet till en matris A har dimensionen 5 så måste A ha minst 5 rader.

2. Bevisa den associativa lagen för matrismultiplikation, $A(BC) = (AB)C$. Det får anses känt att $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ för en kolonnvektor $\boldsymbol{x}$.

3. Visa att om T är en linjär avbildning från R^n till R^m så är $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ där kolonnerna i A utgörs av vektorerna $T(\boldsymbol{e_1}),\ldots,T(\boldsymbol{e_1})$ där $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ är standardbasen i R^n.

4. Tre punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:
$$P_1 : (1, -1, 1),\ P_2 : (-1, 2, 2),\ P_3 : (2, 1, -1).$$

   (a) Beräkna arean av triangeln med hörn i P_1, P_2, och P_3.

   (b) Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten till triangeln i (a).

5. Visa att matrtisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 3 och -3 samt bestäm en ortogonalmatris P och en diagonalmatris D så att $P^T AP = D$.

6. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + bt$ till följande mätdata.

t_i	1	2	3	4
y_i	1	1	2	2

   Bestäm också felvektorn.

7. Bestäm en bas för nollrummet och en ON-bas för kolonnrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

8. Låt $F(\boldsymbol{u})$ vara den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på det underrum till $\boldsymbol{R}^4$ som spänns av vektorerna $(1, 0, 0, 1)^T$, $(1, -1, 0, 0)^T$ och $(1, 0, 1, 0)^T$. Bestäm avbildningsmatrisen för F.

Lycka till!
Sven