SATS 4 (KAPITEL 2): Matrisen $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ är inverterbar omm $\det A = ad-bc\neq 0$. Om $\det A\neq 0$ gäller $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}$.

Bevis: **STEG 1:** Visa att $\det A = 0 \Rightarrow A$ inte inverterbar.

Fall 1: $a=b=0$. Då är $A=\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}$ och

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}-d/c\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \text{om } c\neq 0,\\ A\begin{pmatrix}1\\-c/d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \text{om } d\neq 0,\\ A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \text{om } c=d=0\end{cases}$$

Fall 2: a,b är inte båda $=0$. Då gäller $A\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Eftersom Fall 1 och Fall 2 tillsammans täcker alla möjliga fall, ser vi att i alla fall finns det icketriviala lösningar till $A\bar{x}=\bar{0}$. Om vi nu antar att A är inverterbar och tar en icketrivial lösning $\bar{x}\neq\bar{0}$ till $A\bar{x}=\bar{0}$, så följer det att

$$\bar{x}=I_2\bar{x}=(A^{-1}A)\bar{x}=A^{-1}(A\bar{x})=A^{-1}\bar{0}=\bar{0}$$

Vi vet att $A\bar{x}=\bar{0}$.

Detta motsäger att $\bar{x}\neq\bar{0}$. Alltså är A inte inverterbar.

STEG 2: Det kvarstår att visa att $\det A\neq 0\Rightarrow A$ inverterbar, samt att vi då har den givna formeln för A^{-1}.

Antag alltså att $\det A\neq 0$ och ställ upp följande:

Använd $\det A = ad-bc$

$$* \quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}ad-bc & -ab+ba\\ cd-dc & -bc+da\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$* \quad \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}da-bc & db-bd\\ -ca+ac & -cb+ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Det följer att A är inverterbar och att den givna formeln för inversen är korrekt. $\square$