Lösningsförslag - Tentamen 2017-12-21

1 a) Ett exempel på en sådan vektor är $\bar{x} = (6, -7, 4)$.

b) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är en bas för alla $a \neq -2$.

c) Skärningspunkten är $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

d) Ett exempel på en sådan matris är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

2 a) A är inverterbar om det finns en $n \times n$-matris B sådan att $AB = BA = I_n$, där I_n är identitetsmatrisen.

b) Beviset finns på kurshemsidan.

---

3 a) Använd rad- och kolumnoperationer för att förenkla determinanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x-1 \\ x-1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x+3 & x+4 \\ x & x+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x-1 \\ x-3 & x-3 & 0 & 3-x \\ 1 & 2 & x+3 & x+4 \\ x-2 & x-1 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

← Observera att elementen i den här raden har en gemensam faktor $x-3$.

$$= (x-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & x+3 & x+4 \\ x-2 & x-1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-1)\ (-(x-2)) \end{matrix} = (x-3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & x+3 & x+5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Kofaktorutveckla längs 1:a kolumnen

$$= (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 1 & x+3 & x+5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 0 & x+2 & 4 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

Kofaktorutveckla längs 1:a kolumnen

$$= (3-x) \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)\big((x+2)(1-x) + 4\big) = (3-x)(-x^2 - x + 6) = (x-3)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x-3)(x+3)(x-2).$$

Vi ska alltså lösa ekvationen $(x-3)(x+3)(x-2) = 0$ som har rötterna $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ och $x_3 = 2$.

3b) Matrisen är inverterbar omm dess determinant är $\neq 0$. Alltså följer det från a)-uppgiften att matrisen är inverterbar för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{3,-3,2\}$.

$\boxed{4}$ a) Observera att $F(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ och $F(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$,

där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^3$. Det följer att standardmatrisen

är $A = \begin{pmatrix} F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Börja med att en trappstegsmatris R till A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & 1 & -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}_{\times(-\frac{1}{5})} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Vi ser att pivotkolumnerna i R är kolumn 1, 2 och 3, dvs alla kolumner är pivotkolumner. Det betyder att alla kolumner i A är pivotkolumner och att de tillsammans utgör en bas i Col A. <u>Alltså</u>: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i Col A.

Observera att $\text{rang}(A) = \dim(\text{Col } A) = 3$. Det följer då från rangsatsen att

$\dim(\text{Nul } A) = 3 - \text{rang}(A) = 3 - 3 = 0$.

$\boxed{5}$ a) Observera att A är symmetrisk för alla värden på a. Det följer att A är ortogonalt diagonaliserbar för alla värden på parametern a.

b) <u>Steg 1 - Bestäm A:s egenvärden:</u> Den karaktäristiska ekvationen är

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2$$

Lös ekvationen: $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-(1-a^2)} = 1 \pm |a|$.

Det följer att $\lambda_1 = 1+a$ och $\lambda_2 = 1-a$ är A's egenvärden.

Steg 2 - Bestäm motsvarande egenrum: $\lambda_1 = 1+a$:

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

Egenrummet består av lösningarna till $(A-\lambda_1 I_2)\bar{x} = \bar{0}$: $\left[\begin{array}{cc|c} -a & a & 0 \\ a & -a & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Om $a \neq 0$ så är den allmänna lösningen $\bar{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Alltså: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ utgör en bas i egenrummet.

Om $a = 0$ så löser alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ systemet. En bas för egenrummet utgörs då t.ex. av vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 1-a$: $A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Som ovan studerar vi

$$(A - \lambda_2 I_2)\bar{x} = \bar{0}: \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & a & 0 \\ a & a & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Om $a \neq 0$ är den allmänna lösningen $\bar{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Alltså: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ utgör en bas i egenrummet.

Om $a = 0$ så löser alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ systemet. Observera att då är $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och vi har redan studerat detta egenrum ovan.

Sammanfattning:
- A:s egenvärden är λ_1 och λ_2.
- En ON-bas i λ_1:s egenrum är $\left\{ \overbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=\bar{v}_1} \right\}$.
- —— " —— λ_2:s —— " —— $\left\{ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{v}_2} \right\}$.

OBS: Även då $a = 0$ utgör $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en ON-bas i egenrummet hörande till egenvärdet $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Steg 3: Skapa P och D enligt standardmetoden (se kapitel 5,3 i kursboken):

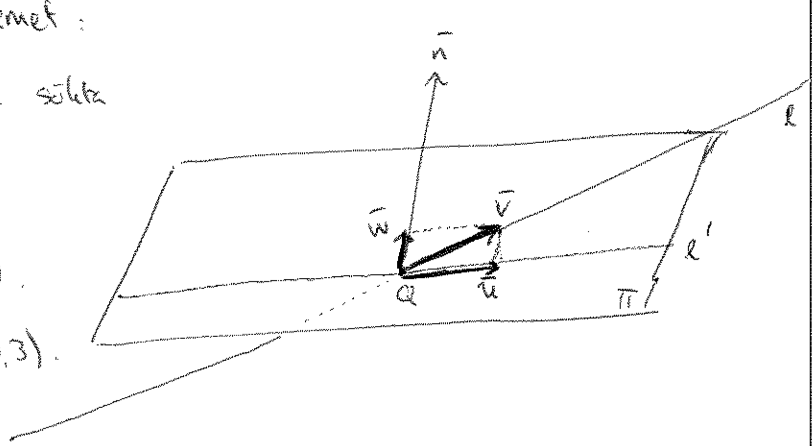
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

För dessa matriser gäller nu att $A = PDP^{-1}$.

4

6 Följande figur beskriver problemet:

Vi betecknar planet med π och den sökta linjen med ℓ'.



Vi vet: • π har normalvektorn $\bar{n} = (1,1,1)$.

• ℓ har riktningsvektorn $\bar{v} = (-1,1,3)$.

Sökes: ℓ':s ekvation.

Behöver: • En punkt på ℓ'. Välj t.ex. punkten Q som är skärningspunkten mellan ℓ och π.

• En riktningsvektor till ℓ'. Välj t.ex. $\bar{u} = \text{proj}_\pi \bar{v}$ = projektionen av $\bar{v}$ på π.

Bestäm punkten Q: Q uppfyller både ℓ:s och π:s ekvationer. Skriv $Q = (3-t_0, 2+t_0, 3t_0)$ för något $t_0 \in \mathbb{R}$. Stoppa in detta i π:s ekvation och lös: $(3-t_0) + (2+t_0) + 3t_0 = 5$

$\Leftrightarrow 3t_0 = 0 \Rightarrow \underline{t_0 = 0}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q = (3,2,0)}}$$

Bestäm vektorn $\bar{u}$: Från figuren har vi $\bar{w} = \text{proj}_{\bar{n}} \bar{v}$ och $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$.

Beräknar alltså $\bar{w} = \text{proj}_{\bar{n}} \bar{v} = \left(\dfrac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n} = \dfrac{3}{3}\bar{n} = \bar{n} = (1,1,1)$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{v} - \bar{w} = (-1,1,3) - (1,1,1) = \underline{\underline{(-2,0,2)}}$$

Det följer att ℓ':s ekvation är $(x,y,z) = (3,2,0) + t(-2,0,2)$, $t \in \mathbb{R}$.

---

7 (a) Om punkterna ligger på en ellips $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ så uppfyller a, b och c ekvationerna

$$\begin{cases} 4a + 4b + 4c = 1 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ a + 2b + 4c = 1 \\ 4a - 2b + c = 1 \end{cases}$$

Vi skriver detta som en matrisekvation:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{=\bar{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\bar{b}} \iff A\bar{v} = \bar{b}$$

Men om punkterna inte ligger på en ellips, saknar $A\bar{v}=\bar{b}$ lösning. Vi söker då efter en minstakvadratlösning till $A\bar{v}=\bar{b}$, dvs vi söker $\hat{v}$ som <u>minimerar</u> $\|\bar{b}-A\bar{v}\|$. Dessa minstakvadratlösningar sammanfaller med lösningarna till <u>normalekvationen</u> $A^TA\bar{v}=A^T\bar{b}$.

<u>Beräkna:</u>

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 20 \\ 28 & 20 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^T\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Normalekvationens totalmatris blir nu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 49 & 2 & 28 & 13 \\ 2 & 28 & 20 & 2 \\ 28 & 20 & 34 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 49 & 2 & 28 & 13 \\ 14 & 10 & 17 & 5 \end{array}\right] (-49)\ (-14) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & -684 & -462 & -36 \\ 0 & -186 & -123 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-\frac{1}{6}) \\ \times(-\frac{1}{3}) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & 114 & 77 & 6 \\ 0 & 62 & 41 & 3 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 62 & 41 & 3 \end{array}\right] \times(-\tfrac{1}{5}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 62 & 41 & 3 \end{array}\right] (-31)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{array}\right] \times\frac{1}{10} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right] (-1)\ (-10) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right] (-7)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 2 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right] \times\frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -3/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right]$$

Normalekvationens, och därmed också minstakvadratproblemets, entydiga lösning är $\hat{v} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ -3/20 \\ 3/10 \end{pmatrix}$. Den sökta ellipsen är alltså $\underline{\frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{20}xy + \frac{3}{10}y^2 = 1}$.

b) Att $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$ är en minstakvadratlösning betyder att $\|\bar{b}-A\hat{v}\| \le \|\bar{b}-A\bar{v}\| \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^3$, dvs $\hat{v}$ minimerar avståndet mellan $\bar{b}$ och Col A.

8 Om $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ (med någon nollskild vektor $\bar{x}$) så är

$$A^2\bar{x} = A(A\bar{x}) = A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\bar{x} = \lambda\cdot\lambda\bar{x} = \lambda^2\bar{x}.$$

Samtidigt gäller $\underset{A^2=A}{A^2\bar{x}} = A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Alltså är $\lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) = 0$, dvs $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

Alltså är $\lambda=0$ och $\lambda=1$ de enda möjliga egenvärdena till matrisen A. Vi undersöker dessa möjligheter en i taget:

$\underline{\lambda=0}$: Att $\dim(\mathrm{Nul}\, A) \geq 1$ betyder att det finns $\bar{x} \neq \bar{0}$ sådant att $A\bar{x} = \bar{0} = 0\bar{x}$, dvs 0 är verkligen ett egenvärde till A och motsvarande egenrum är per definition $\mathrm{Nul}(A - \lambda I) = \mathrm{Nul}(A - 0\cdot I) = \mathrm{Nul}(A)$.

$\underline{\lambda=1}$: Att $\dim(\mathrm{Col}\, A) \geq 1$ betyder att det finns en vektor $\bar{y} \neq \bar{0}$ och en vektor $\bar{x}$ sådana att $A\bar{x} = \bar{y}$. Vi observerar att då gäller $A\bar{y} = A(A\bar{x}) = \underset{A^2=A}{A^2\bar{x}} = A\bar{x} = \bar{y} = 1\cdot\bar{y}$, dvs 1 är verkligen ett egenvärde till A. Kalla det motsvarande egenrummet E_1. Resonemanget ovan ger att $\mathrm{Col}(A) \subseteq E_1$. Men samtidigt gäller $E_1 = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : A\bar{y} = \bar{y}\} \subseteq \mathrm{Col}\, A$. Vi ser alltså att egenrummet E_1 är lika med $\mathrm{Col}(A)$.

Antag att A är $n\times n$-matris

Om $\bar{y} = A\bar{y}$ så blir $\bar{y}$ en linjärkombination av A:s kolumner och alltså ett element i $\mathrm{Col}(A)$