Lösningsförslag - Tentamen 2018-04-03

1 a) $(3\bar{u} - 2\bar{v}) \cdot \bar{w} = -23$

b) Falskt.

c) Arean är $2\sqrt{11}$

d) Ett exempel på en sådan matris är $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

2 a) Se kursboken sid 93.

b) Se kursboken sid 295.

---

3 Vi börjar med att observera att matriserna A, B och C är inverterbara. Detta följer t.ex från följande beräkningar:

$\det A = \ldots = 13$,

$\det B = \ldots = 1$, (Alla 3 determinanter är $\neq 0$)

$\det C = \ldots = -1$.

Vi löser nu ekvationen: $AX^{-1}B = C \iff X^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

$$\iff \underline{\underline{X = BC^{-1}A}}$$

(Dessa steg är möjliga eftersom alla fyra involverade matriser är inverterbara.)

För att bestämma X behöver vi alltså bestämma inversen till matrisen C (använd standardalgoritmen):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) (2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) (3)\ (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Alltså gäller $C^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Det följer att $X = BC^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -43 & 81 & -26 \\ 14 & -26 & 9 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 46 & -14 \\ -20 & 39 & -11 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, vilket är det sökta svaret.

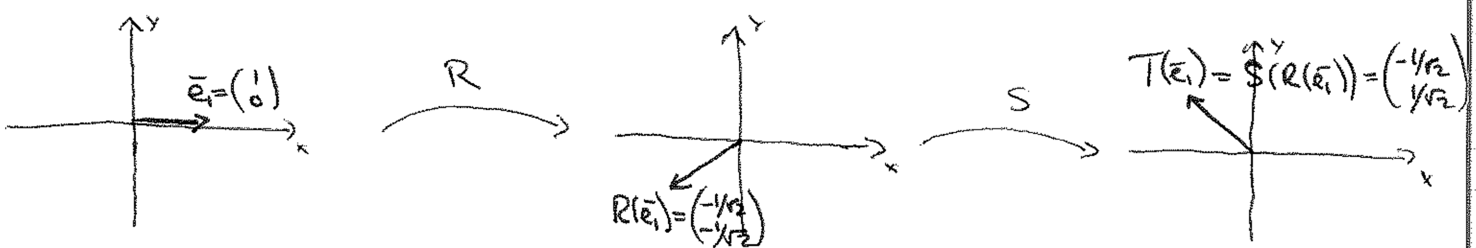
$\boxed{4}$ a) $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning om i) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ $\forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbb{R}^n$
ii) $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$ $\forall c \in \mathbb{R}, \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$

b) Kom ihåg att standardmatrisen kan skrivas $A = \begin{pmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) \end{pmatrix}$, där $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^2$. För att bestämma $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$ låter vi
$\begin{cases} R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ beteckna rotationen av } \mathbb{R}^2 \text{ runt origo med vinkeln } -3\pi/4 \text{ radianer} \\ S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ beteckna spegling av alla punkter i } \mathbb{R}^2 \text{ i } x\text{-axeln.} \end{cases}$

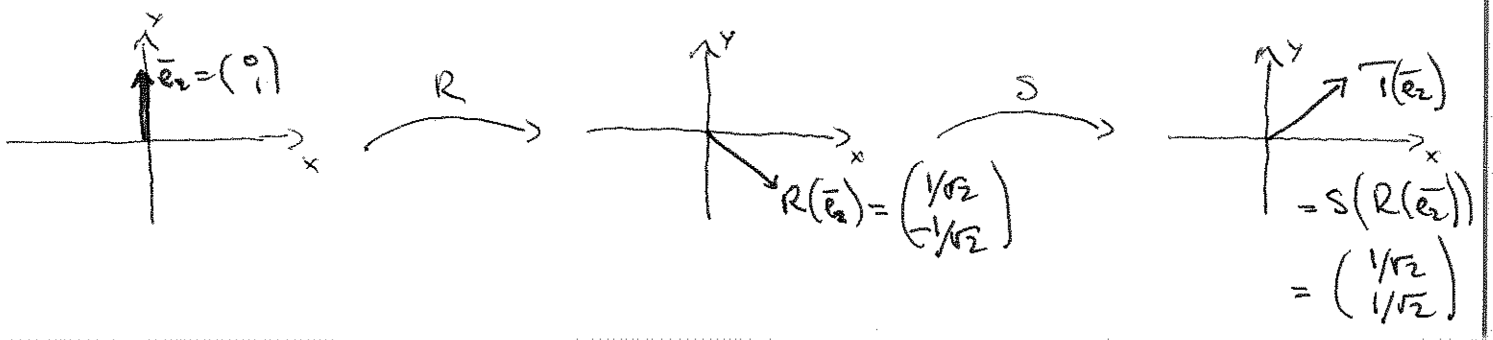
Observera att T är sammansättningen av funktionerna R och S, dvs $\underline{\underline{T = S \circ R}}$.

Alltså gäller $T(\bar{e}_1) = S(R(\bar{e}_1)) = S\left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Detta kan också illustreras grafiskt:



På samma sätt får vi även $T(\bar{e}_2) = S(R(\bar{e}_2)) = S\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.



Det följer att standardmatrisen är $A = \left(T(\bar{e}_1) \;\; T(\bar{e}_2) \right) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

c) Börja med att bestämma en trappstegsmatris R till A:

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \times(\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}) \sim \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = R$$

Vi ser att alla kolumner i R är pivotkolumner. Det betyder att alla kolumner i A är pivotkolumner och att dessa tillsammans utgör en bas i Col A.

Alltså: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i Col A.

Det följer nu från rangsatsen att $\dim(\text{Nul } A) = 2 - \text{rang}(A) = 2 - \dim(\text{Col } A)$
$= 2 - 2 = \underline{\underline{0}}$.

$\boxed{5}$ a) • En nollskild vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ för någon konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ kallas för en <u>egenvektor</u> till A.

• Ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ kallas för ett <u>egenvärde</u> till A om det finns en icke-trivial lösning $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ till ekvationen $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$.

• Mängden av lösningar till $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$ och kallas A's <u>egenrum</u> hörande till egenvärdet λ.

b) <u>Bestäm A:s egenvärden</u>: Den karaktäristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$$

Kofaktorutveckla längs första kolumnen

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Det följer att $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$ är A:s egenvärden.

Vi bestämmer så motsvarande egenrum.

Bestäm egenrummet hörande till $\lambda_1 = 1$: $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Egenrummet består av lösningarna till $(A - \lambda_1 I_3)\bar{x} = \bar{0}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Den allmänna lösningen är $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_2}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ är en bas i egenrummet, dvs egenrummet är $\operatorname{span} B_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Bestäm egenrummet hörande till $\lambda_3 = 3$: $A - \lambda_3 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Egenrummet består av lösningarna till $(A - \lambda_3 I_3)\bar{x} = \bar{0}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Den allmänna lösningen är $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Egenrummet hörande till $\lambda_3 = 3$ är $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\boxed{6}$ Planet $Ax + y + 3z = -5$ har normalvektor $\bar{n} = (A, 1, 3)$.

Beskriv så linjen l på parameterform. För att åstadkomma detta så löser vi systemet

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right] \times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 4/3 \end{array}\right] (-2)$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 4/3 \end{array}\right]$ Den allmänna lösningen är $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 + 1/3\,t \\ 4/3 - 5/3\,t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Detta kan skrivas $\bar{x} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Detta är linjen l på parameterform. Speciellt ser vi att $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor för l.

För att l ska vara parallell med planet $Ax+y+3z=-5$ måste $\bar{n}\cdot\bar{v}=0$

$$\iff \begin{pmatrix} A \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{A}{3} - \frac{5}{3} + 3 = 0 \iff A = 3\left(\frac{5}{3} - 3\right) = 5-9 = \underline{\underline{-4}}$$

Alltså är $A=-4$ det enda reella talet s.a. $Ax+y+3z=-5$ är parallellt med l.

---

7 a) $$A\bar{x} = (\bar{u}\bar{u}^T)\bar{x} = \bar{u}(\bar{u}^T\bar{x}) = (\bar{u}^T\bar{x})\bar{u} \qquad \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Matrismultiplikation är associativ.

Observera att för kolumnvektorer $\bar{u}$ och $\bar{x}$ så är $\bar{u}^T\bar{x}$ ett reellt tal. Alltså gäller $\bar{u}(\bar{u}^T\bar{x}) = (\bar{u}^T\bar{x})\bar{u}$.

Observera nu att detta sammanfaller med formeln för ortogonal projektion av $\bar{x}$ på $\bar{u}$:

$$\text{proj}_{\bar{u}}\,\bar{x} = \left(\frac{\bar{x}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\right)\bar{u} = \left(\frac{\bar{u}^T\bar{x}}{1}\right)\bar{u} = (\bar{u}^T\bar{x})\bar{u}.$$

Obs: $\bar{u}\cdot\bar{u} = \|\bar{u}\|^2 = 1$ eftersom $\bar{u}$ är en enhetsvektor.
$\bar{x}\cdot\bar{u} = \bar{x}^T\bar{u} = \bar{u}^T\bar{x}$ (följer direkt från definitionerna av skalärprodukt, matrismultiplikation och transponat.)

b) Vi ser att $A^T = (\bar{u}\bar{u}^T)^T = (\bar{u}^T)^T\bar{u}^T = \bar{u}\bar{u}^T = A$, vilket visar att A är symmetrisk. Dessutom gäller: $$A^2 = (\bar{u}\bar{u}^T)^2 = \bar{u}\underbrace{(\bar{u}^T\bar{u})}_{=\|u\|^2=1}\bar{u}^T = 1\cdot\bar{u}\bar{u}^T = A.$$

c) Observera att $$A\bar{u} = (\bar{u}\bar{u}^T)\bar{u} = \bar{u}\underbrace{(\bar{u}^T\bar{u})}_{=\|u\|^2=1} = 1\cdot\bar{u}.$$ Alltså är $\bar{u}$ en egenvektor till matrisen A med egenvärde $\lambda=1$.

---

8 a) Kom ihåg: En delmängd $H\subseteq\mathbb{R}^n$ kallas för ett delrum av $\mathbb{R}^n$ om

i) $\bar{0}\in H$ ii) $\bar{u},\bar{v}\in H \Rightarrow \bar{u}+\bar{v}\in H$ iii) $\bar{u}\in H,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow c\bar{u}\in H$.

I den här uppgiften ska vi alltså sätta $n=4$ och $H=U$ och sedan visa att i), ii) och iii) ovan är uppfyllda.

i) Observera att om $\bar{x} = \bar{0}$ så gäller $x_1 - x_4 = x_2 - x_3$. Alltså har vi $\bar{0} \in U$.

ii) Tag nu $\bar{u}, \bar{v} \in U$. Om $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$, så gäller alltså $u_1 - u_4 = u_2 - u_3$ och $v_1 - v_4 = v_2 - v_3$. Det följer att om $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$ så gäller

$$w_1 - w_4 = (u_1 + v_1) - (u_4 + v_4) = (u_1 - u_4) + (v_1 - v_4) = (u_2 - u_3) + (v_2 - v_3) =$$

$$= (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = w_2 - w_3 \quad , \quad \text{dvs. } \bar{w} = \bar{u} + \bar{v} \in U.$$

iii) Tag $c \in \mathbb{R}$ och $\bar{u} \in U$. På samma sätt som ovan använder vi nu att $u_1 - u_4 = u_2 - u_3$ för att visa att $\bar{z} = c\bar{u} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in U$. Vi observerar att

$$z_1 - z_4 = cu_1 - cu_4 = c(u_1 - u_4) = c(u_2 - u_3) = cu_2 - cu_3 = z_2 - z_3 \quad , \text{dvs } \bar{z} = c\bar{u} \in U$$

Tillsammans visar detta att U är ett delrum av $\mathbb{R}^4$.

b) <u>Bestäm först en bas i U.</u> Eftersom $x_1 - x_4 = x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3 + x_4$ så kan vi skriva varje $\bar{x} \in U$ på formen

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_2} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_3}.$$

Det följer att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ spänner upp U. Eftersom $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ dessutom är (tydligt) linjärt oberoende så utgör de en bas i U.

<u>Använd Gram-Schmidt för att göra detta till en ortogonal bas:</u>

Sätt $\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, och fortsätt sedan efter standardproceduren.

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{v}_1} \bar{u}_2 = \bar{u}_2 - \left(\frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \right) \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Sätt } \bar{v}_2' = 2\bar{v}_2$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2'\}$ är nu en ortogonal bas i $W = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2'\} = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$.

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \text{proj}_W \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \left(\frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}\right)\bar{v}_1 - \left(\frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2'}{\bar{v}_2' \cdot \bar{v}_2'}\right)\bar{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sätt $\bar{v}_3' = 3\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Enligt Gram-Schmidts procedur är nu $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2', \bar{v}_3'\}$ en ortogonal bas i U. Till sist normaliserar vi denna bas för att få en ON-bas:

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\|\bar{v}_1\|}\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2'\|}\bar{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_3 = \frac{1}{\|\bar{v}_3'\|}\bar{v}_3' = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>Här gäller:</u> $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ är en ON-bas i U.
