

Extra uppgifter till lektion 11

1. a) Beräkna, för *alla* värden på konstanten a , determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

- b) För vilka värden på konstanten a är ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart för varje högerled (dvs. för varje 4×1 -matris) \mathbf{b} ?

2. a) Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- b) För vilka värden på x är den motsvarande matrisen inverterbar?

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & 4 & 1 \\ -1 & 19 & 14 & -41 \\ -31 & 39 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 29 & 4 & -11 \\ -1 & 31 & 14 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

vara tre stycken inverterbara matriser. Beräkna $\det(D)$ där

$$D = A^2 C B C B^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-2} B C.$$

Svar:

- 1a. $\det(A) = -(a-3)(a-2)(a-1)(a+6)$. Detta kan också skrivas $\det(A) = -a^4 + 25a^2 - 60a + 36$.
- 1b. Detta inträffar för alla $a \in \mathbb{R} \setminus \{3, 2, 1, -6\}$.
- 2a. Lösningarna är $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$ och $x_4 = -5$.
- 2b. Matrisen är inverterbar för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 1, -5\}$.
3. $\det(D) = 36$.