Lösningar till MMG 200: 2 2016-08-17

① f, f, f, s, f, s, s, s

② Sats 6.5

③ Sats 2.6 och 2.12

---

④ a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ som ger

$z = t$, $y = 1 + t$, $x = -t$ och $\underline{\mathbf{x} = (0,1,0) + t(-1,1,1)}$

b) En normalvektor: $\mathbf{n} = (-1, 1, 1)$ enl. a)

$-1 \cdot (x - (-2)) + 1 \cdot (y - 3) + 1(z - (-1)) = 0$, ger ekvationen $\underline{-x + y + z = 4}$

---

⑤ Kolla determinanten: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} =$

$= (x+1)(x-2) = 0$ då $\underline{x = -1 \text{ eller } x = 2}$

$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linb om $\underline{x = -1}$, ty $(-1, -1, 1) + (1, 1, -1) = (0, 0, 0)$

$\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ —"— $\underline{x = 2}$ ty då är $\mathbf{a} = \mathbf{c}$

$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ är <u>ej linb för något</u> x ty

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ger $(x, -1, 1) = t(1, 1, 2) \Rightarrow t = -1$ och $t = 1/2$, vilket förstås är omöjligt

---

⑥ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ visar att

$\mathbf{b}$ ej ligger i kolonnrummet. Lös då systemet $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Felvektorn $= A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}$

---

⑦ $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$ ger

egenvärdena $2, -1, 1$.

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\underline{D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \underline{P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

---

⑧ $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{x+y}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$

$G(\mathbf{u}) = $ —"— $= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{x+z}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-z \\ 2y \\ -x+z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$

Avbildningsmatrisen för $G(F(\mathbf{u}))$ blir då

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$