Lösningar till
MMG200:2
2017 04 18

① f s s s f s f f

② a) sats 2.5 b) sats 2.6 c) sats 2.12

③ Sats 1.8

④ Vektor längs linjen $V_1 = (1, 2, 2)$
Punkt på linjen $X_1 = (2, 0, 1)$. Om då $X_2 = (1, 1, 2)$
så är $V_2 = X_2 - X_1 = (-1, 1, 1)$ en vektor i planet
Vi får en normalvektor: $n = V_1 \times V_2 = (0, -3, 3)$
Planets ekvation $0\cdot(x-2) - 3(y-0) + 3(z-1) = 0$
$-y + z = 1$

⑤ $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$. Egenvärdena 1 och 2.
$\lambda = 1$ ger $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\lambda = 2$ – " – $= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
Så $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Vi får $A^6 = PD^6P^{-1} = \{P^{-1} = P!\}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^6 \\ 0 & 2^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -63 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$

⑥ Vi har $Ax = b$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $b = (4, 2, 1, 2, 1)^T$.
$(A^TA \mid A^Tb) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $\{x=1, y=1$
Felvektorn $= A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

⑦ $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-a & 2-a & -a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$. $a = 2, \neq -1$ ger
bas för kolonnrummet $= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}\right\}$.
och $\dim(\mathrm{Nul}A) = 1$
$a = -1$: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och bas $= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
och $\dim(\mathrm{Nul}A) = 1$
$a = 2$: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och bas $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
och $\dim(\mathrm{Nul}A) = 2$

⑧ Enl. satsen $(\mathrm{Row}A)^\perp = \mathrm{Nul}A$ så
söker vi nollrummet till matrisen
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
$Ax = 0$ har då lösningarna $x = (t, s+t, s, t, t)^T =$
$s(0, 1, 1, 0, 0)^T + t(1, 1, 0, 1, 1)^T$ vilket
ger en bas för sökta rummet.
Ortogonalisera:
$V_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$ och $u_2 = (1, 1, 0, 1, 1)^T$
$V_2 = u_2 - \frac{V_1 \cdot u_2}{V_1 \cdot V_1} V_1 = (1, 1, 0, 1, 1)^T - \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0, 0)^T =$
$= \frac{1}{2}(2, 1, -1, 2, 2)^T$. Efter normering får vi
ON-basen $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, -1, 2, 2)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0, 0)^T\right\}$