Lösningar till MMG200, Linjär algebra 17-08-16

(1) c) och h) falska. Resten sanna

---

(4) $v_1 = (2,1,1) - (1,0,1) = (1,1,0)$ och

$v_2 = (-1,1,2) - (1,0,1) = (-2,1,1)$ ligger båda i planet. En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (1,-1,3)$

Planets ekvation: $1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-0) + 3(z-1) = 0$,

dvs $\underline{x - y + 3z = 4}$

---

(5) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ -2 & 2 & a & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array}\right]$

Entydig lösning om $a \neq 1$ och -2.

$a=1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

En fri variabel: Många lösningar

$a=-2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ Ingen lösning

---

(6) Egenvärden: $0 = A - \lambda E = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$

Egenvektorer: $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $u_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\text{normerad}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

vänd

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

---

(7) $A \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ är bas för kolonnrummet

Nollrummet: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ x_2 fri $x = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ bas för nollrummet

---

(8) $A^3 = A \Leftrightarrow A^3 - A = 0 \Leftrightarrow {}^{*)} A(A+I)(A-I) = 0$

Nu är $\det A \neq 0$ annars vore $\lambda = 0$ ett egenvärde.

Men också $\det(A+I) \neq 0$ — " — $\lambda = -1$ — " —

Multiplicera med $(A+I)^{-1}A^{-1}$ från vänster i *)

så får vi $A - I = 0$, dvs $A = I$.