Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren (031-7723066)

Linjär algebra, MMG200 del 2
2017-12-21, kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031-7725325

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) Ange en nollskild vektor som är ortogonal mot de båda vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,2,2)$ och $\boldsymbol{v} = (-1,2,5)$.

   b) För vilka värden på parametern a utgör vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (a+1, 3)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (2, -6)$ en bas i $\mathbb{R}^2$?

   c) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $(x,y) = (1,2) + t(3,-1)$ och $(x,y) = (2,3) + s(1,-1)$.

   d) Ge ett exempel på en 2×2-matris som är inverterbar men inte diagonaliserbar.

2. a) Låt A vara en $n \times n$-matris. Ge definitionen för att matrisen A är inverterbar.

   b) Bevisa följande sats: Matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är inverterbar om och endast om $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Om $\det(A) \neq 0$ gäller dessutom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3. a) Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x-1 \\ x-1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x+3 & x+4 \\ x & x+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

   b) För vilka värden på x är den motsvarande matrisen inverterbar?

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definieras genom

$$F(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - 5x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 5x_2 - 2x_3, 3x_1 - 7x_2 + 8x_3).$$

   a) Bestäm avbildningens standardmatris A.

   b) Bestäm en bas i matrisen A:s kolumnrum samt ange dimensionen på A:s nollrum.

5. a) För vilka värden på parametern a är matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar?

   b) Bestäm för varje sådant a en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

6. Den räta linjen $\ell : (x,y,z) = (3 - t, 2 + t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, projiceras ortogonalt på planet $x + y + z = 5$. Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som utgör bilden av ℓ under projektionen.

7. I den här uppgiften är vi intresserade av att med hjälp av minstakvadratmetoden anpassa en ellips med ekvation
$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$
   till de fyra punkterna $(2,2)$, $(-2,1)$, $(-1,-2)$ och $(2,-1)$.

   a) Formulera och lös detta minstakvadratproblem.

   b) Förklara vad det betyder att lösningen i a) är en minstakvadratlösning.

8. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller $A^2 = A$. Antag dessutom att $\dim(\mathrm{Nul}A) \geq 1$ och $\dim(\mathrm{Col}A) \geq 1$. Visa att A:s egenvärden är 0 och 1 och att motsvarande egenrum är $\mathrm{Nul}A$ respektive $\mathrm{Col}A$.

Lycka till och God Jul!