Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren (031-7723066)

Linjär algebra, MMG200 del 2
2018-04-03, kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Oskar Allerbo,
tel. 031-7725325

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{v} = (0,2,1)$ och $\boldsymbol{w} = (-1,5,3)$. Beräkna $(3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$.

   b) Är följande påstående sant eller falskt? *Om ℓ är en linje i $\mathbb{R}^2$ så är ℓ ett linjärt delrum av $\mathbb{R}^2$.*

   c) Låt $\boldsymbol{u} = (1,-2,1)$ och $\boldsymbol{v} = (1,0,3)$. Beräkna arean av det parallellogram som spänns upp av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

   d) Ge ett exempel på en 2×2-matris som är diagonaliserbar men inte inverterbar.

2. a) Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Bevisa att T är injektiv om och endast om ekvationen $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ endast har den triviala lösningen.

   b) Bevisa att om A och B är similära $n \times n$-matriser, så har de samma karaktäristiska polynom.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Lös matrisekvationen

$$AX^{-1}B = C.$$

4. a) Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Ge definitionen för att T är en linjär avbildning.

   b) Bestäm standardmatrisen A till den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först roterar alla punkter i $\mathbb{R}^2$ runt origo med vinkeln $-3\pi/4$ radianer och sedan reflekterar alla punkter i $\mathbb{R}^2$ i (den horisontella) x-axeln.

   c) Bestäm en bas i matrisen A:s kolumnrum samt ange dimensionen på A:s nollrum.

5. a) Definiera begreppen egenvärde, egenvektor och egenrum för en kvadratisk matris A.

   b) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestäm A:s egenvärden och motsvarande egenrum.

6. Avgör för vilka reella tal A som planet $Ax + y + 3z = -5$ är parallellt med den räta linjen ℓ som är snittet mellan planen $x + 2y + 3z = 1$ och $2x + y + z = -2$.

7. Låt $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ vara en (fixerad) enhetsvektor och definiera $n \times n$-matrisen A som $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$.

   a) Beräkna $A\boldsymbol{x}$ för alla vektorer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ och visa att $A\boldsymbol{x}$ är den ortogonala projektionen av vektorn $\boldsymbol{x}$ på vektorn $\boldsymbol{u}$.

   b) Visa att A är en symmetrisk matris och att A dessutom uppfyller $A^2 = A$.

   c) Visa att $\boldsymbol{u}$ är en egenvektor till matrisen A och bestäm egenvärdet hörande till egenvektorn $\boldsymbol{u}$.

8. Låt $U \subset \mathbb{R}^4$ vara delmängden

$$U := \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = x_2 - x_3 \right\}.$$

   a) Visa att U är ett delrum av $\mathbb{R}^4$.

   b) Bestäm en ON-bas i delrummet U.

Lycka till!