Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren (031-7723066)

Linjär algebra, MMG200 del 2
2018-08-22, kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Jimmy Johansson, tel. 031-7725325

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) För vilka värden på parametern a är vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)$ och $\boldsymbol{v}_4 = (0,a,0)$ linjärt beroende?

   b) Låt $\boldsymbol{u} = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{v} = (0,2,1)$ och $\boldsymbol{w} = (-1,5,3)$. Beräkna $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

   c) En linjär avbildning har standardmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ange avbildningens definitionsmängd och målmängd.

   d) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $(x,y) = (2,3) + t(1,2)$ och $(x,y) = (1,3) + s(-1,-1)$.

2. a) Antag att $\boldsymbol{u} = (x,y,z)$ och $\boldsymbol{v} = (x',y',z')$ är två vektorer i ett ortonormerat koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$. Bevisa att
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = xx' + yy' + zz'.$$

   b) Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$ vara en ortogonal bas för ett delrum $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Låt $\boldsymbol{y} \in W$. Bevisa att koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{y}$ i basen $\mathcal{B}$ ges av
$$c_j = \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j}, \qquad 1 \le j \le p.$$

3. a) Låt $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$. Ge definitionen av det linjära höljet (dvs. det som på engelska heter *the span*) av vektorerna $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r$.

   b) Lös det linjära ekvationssystemet
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & & & = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 8 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}\right. .$$

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definieras genom

$$F(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - 7x_2 + 7x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3, 2x_2 - 6x_3).$$

   a) Bestäm avbildningens standardmatris A.

   b) Avgör om avbildningen F är injektiv.

   c) Avgör om avbildningen F är surjektiv.

5. a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   b) Beräkna A^{100}.

6. a) Låt V vara ett delrum av $\mathbb{R}^n$. Ge definitionen av V:s ortogonala komplement.

   b) Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = kx + m$ till punkterna (0,1), (1,3), (2,4) och (4,4).

7. Låt ℓ vara linjen som ges av ekvationen $(x,y,z) = (2,1,0) + t(1,3,-1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt Π vara planet som ges av ekvationen $x - y + z = 2$. Bestäm ekvationen på parameterform för spegelbilden av ℓ i Π.

8. a) Visa att om A är en kvadratisk matris sådan att $A^k = 0$ för något positivt heltal k, så är $I - A$ inverterbar med den inversa matrisen

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

   b) Låt A vara en kvadratisk matris sådan att

$$A^3 + 5A^2 + 6A + I = 0.$$

   Visa att matrisen A är inverterbar och bestäm dess inversa matris.

Lycka till!