MATEMATIK
Göteborgs universitet

Dugga 1 - Lösningar

Envariabelanalys, hösten 2017

Fel svar = -1 P. Rätt svar = + 1P. Total Poäng blir maximum av noll och poäng som ni har fått på duggan. Altså maximum är 10P total, minimum är 0P total.

Skriv ditt namn och personnummer:

(2P möjligt) Bestäm vad händer när $x \to \infty$:

$$\frac{7x^9 + 2^x}{2^{2x} + x} \longrightarrow$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3}{\sin(x) + x^3 + 2x^4 + x^2} \longrightarrow$$

Vi ser att dominanta termerna i den första är:

$$\frac{7x^9}{2^{2x}}.$$

Med Godzilla Satsen, vet vi at $2^{2x} = 4^x \to \infty$ MYCKET snabbare än $7x^9$. Så

$$\frac{7x^9 + 2^x}{2^{2x} + x} \longrightarrow 0 \text{ när } x \to \infty.$$

Nu vi jämnför dominanta termerna i den andra:

$$\frac{4x^4}{2x^4} = 2.$$

Altså

$$\frac{4x^4 + 6x^3}{\sin(x) + x^3 + 2x^4 + x^2} \longrightarrow 2 \text{ när } x \to \infty.$$

(2P möjligt) Bestäm vad händer när $x \to 0$:

$$\frac{\sin(2x)}{x} \longrightarrow$$

$$\frac{\tan(2x)}{-x} \longrightarrow$$

För den första vi använder dubbel-vinkel formeln för sin:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Altså vi har

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x}.$$

Vi vet från vår fin sats att

$$\frac{\sin(x)}{x} \to 1 \text{ när } x \to 0.$$

Vi vet också att $\cos(x) \to 1$ när $x \to 0$. Altså tillsammans får vi

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x} \longrightarrow 2 \text{ när } x \to 0.$$

För den andra, vi använder definitionen av tan,

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}.$$

Sedan vi skriver

$$\frac{\tan(2x)}{-x} = -\frac{\sin(2x)}{x\cos(2x)}.$$

Vi vet att

$$\frac{\sin(2x)}{x} \to 2 \text{ när } x \to 0.$$

Vi vet också att

$$\cos(2x) \to 1 \text{ när } x \to 0.$$

Altså tillsammans får vi att

$$\frac{\tan(2x)}{x} = -\frac{\sin(2x)}{x\cos(2x)} \longrightarrow -2 \text{ när } x \to 0.$$

(2P möjligt) Bestämm om funktionerna är jämn, udda, eller varken jämn eller udda:

1. $f(x) = x^3 + 3x + 1$
2. $f(x) = \cos(x^3)$.

Vi kan helt enkelt försöka att sätta in $-x$ och x och ser vad händer då:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3x + 1 = -x^3 - 3x + 1.$$

Om vi tänker att f skulle vara udda (för vi ser potensen 3 som är ju udda), vi skulle ha

$$-f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

så vi skulle ha

$$-\left(-x^3 - 3x + 1\right) = f(x) = x^3 + 3x + 1 \iff x^3 + 3x - 1 = x^3 + 3x + 1 \iff 0 = 2.$$

Oj! Nej! Uff da! Det går inte alls! Så f är i alla fall *inte* udda. Nu undersöker vi om f är jämn. Då skulle vi ha att

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vi skriver den vänstra sidan:

$$f(-x) = -x^3 - 3x + 1 = f(x) = x^3 + 3x + 1 \iff 2x^3 + 6x = -2 \text{ gäller } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gäller det för t.ex. $x = 0$? Nej. Altså f är varken udda eller jämn!

Nu tittar vi på $\cos(x^3)$. Jag sätter in $-x$,

$$\cos((-x)^3)) = \cos(-x^3) = \cos(x^3).$$

Sista ekvationen gäller darför att cos är ju själv jämn. Altså funktionen $\cos(x^3)$ är också jämn.

(2P möjligt) Hitta alla lösningar $z \in \mathbb{C}$ till:

1. $2z^3 + 1 = 3$
2. $z^4 - 1 = 0$

Vi börjar att skriva om lite gränn:

$$2z^3 = 2 \iff z^3 = 1.$$

Så vi vill hitta alla $z \in \mathbb{C}$ med $z^3 = 1$. Var inte rädd för Eulers formel! Det är så *jättemycket lättare* än att kämpa med cos och sin. Tro på mig! Så vi vet att

$$e^{2k\pi i} = 1 \forall k \in \mathbb{Z},$$

darför att med Eulers formel,

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + 0i = 1.$$

Så vi skriver

$$z^3 = e^{2k\pi i}.$$

Vi börjar med $k = 0$. Då får vi

$$z^3 = e^{(0)2\pi i} \implies z = e^{(0)2\pi i/3} = e^0 = 1.$$

Sedan tar vi $k = 1$. Då får vi

$$z^3 = e^{2\pi i} \implies z = e^{2\pi i/3}.$$

Nästa tar vi $k = 2$. Då får vi

$$z^3 = e^{2(2)\pi i} = e^{4\pi i} \implies z = e^{4\pi i/3}.$$

En polynom ekvation med grad 3 har ju precis 3 rotter i $\mathbb{C}$. Så vi har hittat alla av dem!

Nu vi tar den andra:

$$z^4 = 1.$$

Vi kör på samma sätt: ($k = 0$ först)

$$z^4 = e^{(0)2\pi i} \implies z = e^{(0)2\pi i/4} = e^0 = 1.$$

Nu tar vi $k = 1$:

$$z^4 = e^{(1)2\pi i} \implies z = e^{2\pi i/4}.$$

Nu tar vi $k = 2$:

$$z^4 = e^{(2)2\pi i} \implies z = e^{4\pi i/4}.$$

Nu tar vi $k = 3$:

$$z^4 = e^{(3)2\pi i} \implies z = e^{6\pi i/4}.$$

Klart! Lite anmärkning: Jag har inte utvecklat eller förenklat! Hur så? Det behövs inte! Ni får gärna göra om ni vill, men om ni vill inte, inga fara!

(2P möjligt) Låt f vara en funktion som är definerad i $\mathbb{R}$ och som är jämn. Kan f vara injektiv? (1P för rätt svar).

1. (1P) Om du svarar ja, ge ett exempel av en funktion definerad i $\mathbb{R}$ som är injektiv i $\mathbb{R}$.
2. (1P) Om du svarar nej, varför?

NEJ. Varför? Man har om f är jämn att

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Så till exempel tar vi $x = 1$. Sedan vi får

$$f(-1) = f(1),$$

men

$$-1 \neq 1.$$

Det går inte för en funktion som skulle vara injektiv. Injektivitet betyder att

$$f(x) \neq f(\tilde{x}) \quad \forall x \neq \tilde{x}.$$