MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2019-01-04.

1. Se boken sidorna 132-133.

2. Se boken sidorna 231 och 234 för definitionen. Man kan t ex ta $\mathbb{Z}_4$, d v s kongruensklasser modulo 4 med addition och multiplikation modulo 4, och här kan man byta ut 4 mot vilket sammansatt heltal som helst.

3. Se boken sidan 61.

4. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}1085 &= 1 \cdot 756 + 329\\ 756 &= 2 \cdot 329 + 98\\ 329 &= 3 \cdot 98 + 35\\ 98 &= 2 \cdot 35 + 28\\ 35 &= 1 \cdot 28 + 7\\ 28 &= 4 \cdot 7.\end{aligned}$$

Från detta drar vi slutsatsen att $\mathrm{SGD}(1085, 756) = 7$.

(b) Eftersom $\mathrm{SGD}(1085, 756) \mid 7$ så finns det oändligt många lösningar till ekvationen. Vi bestämmer en av dessa genom att utnyttja likheterna från Euklides algoritm nedifrån och upp:

$$\begin{aligned}7 &= 35 - 28 = 35 - (98 - 2 \cdot 35) = 3 \cdot 35 - 98\\ &= 3(329 - 3 \cdot 98) - 98 = 3 \cdot 329 - 10 \cdot 98\\ &= 3 \cdot 329 - 10(756 - 2 \cdot 329) = 23 \cdot 329 - 10 \cdot 756\\ &= 23(1085 - 756) - 10 \cdot 756 = 23 \cdot 1085 - 33 \cdot 756.\end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = 23$ och $y = -33$. Eftersom $1085/7 = 155$ och $756/7 = 108$ så ges alla lösningar av

$$x = 23 + 108n,\ y = -33 - 155n \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$

5. Sätt $f(n) = 2^n + (-1)^n$. Vi ska då visa att $a_n = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Eftersom rekursionen för a_n innehåller både a_{n-1} och a_{n-2} så behöver vi troligen två basfall. Om vi sätter $n = 0$ respektive $n = 1$ så får vi

$$f(0) = 2^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2 = a_0$$

respektive

$$f(1) = 2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1 = a_1,$$

så det stämmer för $n = 0$ och $n = 1$.

Antag nu att $f(k) = a_k$ för alla $0 \leq k < n$ för något $n \geq 2$. Visa att i så fall är $f(n) = a_n$. Eftersom $n \geq 2$ så ger rekursionen och vårt antagande att

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} = f(n-1) + 2f(n-2) \\ &= 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + (-1)^{n-2}) \\ &= 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-2} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} + ((-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}) + (-1)^{n-2} = 2^n + (-1)^n = f(n). \end{aligned}$$

Här utnyttjade vi i sista raden att $(-1)^{n-1} = -(-1)^{n-2}$ och $(-1)^n = (-1)^{n-2}$. Enligt induktionsprincipen gäller därmed att $a_n = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

6. (a) Välja sex bland fjorton kan göras på

$$\binom{14}{6} = 3003$$

olika sätt.

(b) Välja tre pojkar bland åtta kan göras på

$$\binom{8}{3} = 56$$

olika sätt och välja tre flickor bland sex kan göras på

$$\binom{6}{3} = 20$$

olika sätt. Totalt blir det $56 \cdot 20 = 1120$ olika sätt.

(c) Det är snabbast att räkna ut de varianter som inte är tillåtna och subtrahera detta från svaret i a-uppgiften. De som inte är tillåtna är med en pojke eller ingen pojke.

En pojke kan väljas på 8 sätt och sedan kan man välja fem flickor på

$$\binom{6}{5} = 6$$

olika sätt. Totalt $8 \cdot 6 = 48$ varianter med en pojke. Ingen pojke kan väljas på bara 1 sätt eftersom då måste man välja alla de sex flickorna. Svaret på uppgiften blir alltså $3003 - 48 - 1 = 2954$.

7. Den är reflexiv om och endast om $x \equiv x + 3 \pmod{n}$, dvs $n \mid (x+3) - x$, dvs $n \mid 3$, dvs $n = 3$.

För symmetri, antag att xRy och undersök när detta medför att yRx dvs $y \equiv x+3 \pmod{n}$. Om xRy gäller $x \equiv y+3 \pmod{n}$, och då är $x+3 \equiv y+6 \pmod{n}$, så $y \equiv x+3 \pmod{n}$ om och endast om $y \equiv y+6 \pmod{n}$, dvs $n \mid (y+6) - y$, dvs $n \mid 6$, dvs $n = 2$ eller $n = 3$ eller $n = 6$.

För transitivitet, antag att xRy och yRz och undersök när detta medför att xRz dvs $x \equiv z+3 \pmod{n}$. Om xRy och yRz gäller $x \equiv y+3 \pmod{n}$, och $y \equiv z+3 \pmod{n}$, och då är $x \equiv z+6 \pmod{n}$. Det medför att $x \equiv z+3 \pmod{n}$ om och endast om $z+6 \equiv z+3 \pmod{n}$, dvs $n \mid (z+3) - (z+6)$, dvs $n \mid -3$, dvs $n = 3$.

(Fotnot: när $n = 3$ är relationen inget annat än kongruens modulo 3.)

8. Vi gör ett induktionsbevis och börjar med basfallet $n = 1$. Vänsterledet blir då $1! = 1$ och högerledet $(1/e)^1 = 1/e < 1$ så det stämmer då $n = 1$.

   Antag nu att det gäller för något $n \geq 1$, d v s

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

   Vi ska visa att i så fall gäller det för $n + 1$, d v s

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

   Vi får från definitionen av fakultet och vårt antagande att

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

   Det räcker alltså att visa att

$$(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

   Om vi förkortar båda leden med $n + 1$ får vi den ekvivalenta olikheten

$$\frac{n^n}{e^n} \geq \frac{(n+1)^n}{e^{n+1}}.$$

   Föränger vi båda leden med e^n så får vi med hjälp av lite algebra de ekvivalenta olikheterna

$$\begin{aligned} n^n \geq \frac{(n+1)^n}{e} &\iff e \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &\iff e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \iff e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

   Den sista olikheten gäller enligt satsen för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, eftersom följden som högerledet ger är strängt växande och därmed är varje term mindre än gränsvärdet vilket är vänsterledet.

   Alltså har vi visat att om det gäller för n så gäller det också för $n + 1$ och enligt induktionsprincipen gäller det därmed för alla positiva heltal.