GÖTEBORGS UNIVERSITET
MATEMATIK 1, MMG200, HT2018
INLEDANDE ALGREBRA

Övningshäfte 5: Kombinatorik

Övning L

Syftet med övningen är att upptäcka vissa allmänna principer för kombinatoriska resonemang och att se hur kombinatoriska problem uppkommer i olika situationer, samt att kunna bevisa matematiska påståenden med hjälp av kombinatorik. De viktigaste begreppen är

- Dirichlets lådprincip
- multiplikationsprincipen
- permutationer
- kombinationer och binomialsatsen

1. Diskutera följande frågor:
   (a) Hur många studenter måste det vara i en grupp för att man säkert ska veta att minst två av dem fyller år i samma månad?
   (b) Hur många måste det finnas för att minst $3,\ 4,\ 5, \ldots, n$ stycken ska ha födelsedag i samma månad?
   (c) Tänk efter hur ni resonerade och försök formulera en allmän princip.
2. Visa att bland 101 heltal finns det minst två vars skillnad är delbar med 100.
3. Betrakta följande utsaga: "Bland er som läser Matematik 1 så finns det minst två personer som känner lika många bland de övriga." Är utsagan sann? Behövs någon förutsättning? Bevisa!
4. Antag att du har 4 olika jeans och 6 olika t-tröjor (och inga andra kläder).
   (a) På hur många sätt kan du klä dig?
   (b) Antag att du av någon anledning vill ha 2 t-tröjor på dig. På hur många sätt kan du då klä på dig?
   (c) Det finns två sätt att tänka om den senaste frågan. Vilka? Hur många sätt blir det i de båda fallen?
   (d) Tänk efter hur ni har resonerat och försök att formulera en princip. Jämför därefter med multiplikationsprincipen i boken.

5. Givet siffrorna $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7$. Om varje siffra endast får användas en gång, hur många tre-siffriga tal kan man då bilda
   (a) överhuvudtaget?
   (b) om talet ska vara udda?
   (c) om talet ska vara jämnt?
   (d) om talet ska vara delbart med 5?

6. Betrakta en mängd med tre element som vi betecknar $a,\ b$ och c. Om vi skriver dessa i en viss **ordning**, t ex bac, så kallar vi detta för en *permutation* av elementen $a,\ b$ och c. Andra permutationer är acb, abc och cab.
   (a) Finns det fler permutationer? Hur många finns det? Skriv upp alla.
   (b) Hur många permutationer finns det av en mängd med 4 element?
   (c) Generalisera till ett påstående om antalet permutationer av en mängd med n element.

7. Tänk nu tillbaka på uppgiften som handlade om antalet sätt att klä sig med två t-tröjor då man hade 6 att välja bland (vi struntar i jeansen nu). Det finns två olika sätt att tolka problemet:

   - Ordningen mellan de två valda t-tröjorna spelar roll (d v s vilken som är överst respektive underst). I detta fall handlar det om att välja en *permutation* av 2 element bland 6 givna.
   - Ordningen spelar inte någon roll. Då talar vi om att välja en *kombination* av 2 element bland 6 givna.

   Betrakta en given mängd $\{a,\ b,\ c\}$ med 3 element. Alla möjliga permutationer av 2 element valda bland dessa 3 är
   $$ab,\ ba,\ bc,\ cb,\ ac,\ ca.$$
   (a) Hur många permutationer av 2 element ur en mängd $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ med 4 element finns det? Skriv upp alla.
   (b) Hur många permutationer av 3 element valda bland 4 finns det? Skriv upp alla.
   (c) Hur resonerar ni? Försök finna en princip och formulera den.
   (d) Nu ska vi generalisera principen: Antag att vi har en mängd M med n element. Vi frågar oss nu hur många permutationer det finns med k stycken element valda ur M?

8. I förra uppgiften såg vi att
   $$ab,\ ba,\ bc,\ cb,\ ac,\ ca.$$
   var alla permutationer av 2 element valda bland 3. Vi ser att ab och ba innehåller samma element och samma sak gäller för ac och ca samt bc och cb. Att välja 2 element ur 3 givna utan hänsyn till ordningen kallas för att välja en *kombination* av 2 element ur 3 givna. Det finns alltså 3 olika kombinationer av 2 element ur 3 givna. Detta brukar skrivas $\binom{3}{2}$ vilket utläses "tre över två". Vi har alltså att $\binom{3}{2} = 3$.
   (a) Titta nu på era uppskrivna permutationer av 2 respektive 3 element valda bland 4. Bestäm genom en direkt kontroll vad $\binom{4}{2}$ och $\binom{4}{3}$ blir.

(b) I uppgift 7 beräknade ni antalet permutationer av 2 och 3 element valda bland 4. Fundera över sambandet mellan dessa och $\binom{4}{2}$ och $\binom{4}{3}$. Försök finna och formulera en regel. Generalisera denna regel, d v s finn en formel för $\binom{n}{k}$. Jämför med boken.

9. Vi har definierat $\binom{n}{k}$ som antalet kombinationer av k element valda ur n givna. Ni har (?) funnit det algebraiska sambandet

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tänk igenom vad detta betyder då $k = 0$ och $k = n$. Stämmer formeln? Vad är $\binom{n}{0}$ respektive $\binom{n}{n}$?

10. Låt M_n vara en mängd med n element (t ex $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$).

(a) Hur många delmängder har M_2? Hur många av dessa delmängder har *ett* element? Hur många har noll respektive två element?

(b) Gör om motsvarande för $n = 3$, 4 och 5. Gör detta systematiskt och skriv ned resultaten för varje n på en rad. Ta även med $n = 0$ och $n = 1$.

(c) Betrakta följande triangulära schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Vad har detta med delmängderna till $M_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ att göra?

(d) Visa sambandet

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Försök göra det på två olika sätt. Dels genom ett kombinatoriskt resonemang och dels genom att använda den algebraiska formeln. (Tips för det kombinatoriska beviset: Låt ett av de $n+1$ elementen vara "speciellt". Hur många delmängder med k element bland $n+1$ finns det som innehåller detta element och hur många finns det som inte innehåller detta?)

(e) Observera att sambandet i förra uppgiften ger en rekursiv formel för att räkna ut antalet kombinationer. Använd detta för att beräkna de första 6 raderna i det triangulära schemat ovan. Vad är det för startvärden? (Känner ni igen Pascals triangel?)

(f) Det finns en symmetri i varje rad i triangeln. Försök formulera ett påstående om $\binom{n}{k}$ som beskriver just denna symmetri. Bevisa påståendet med ett kombinatoriskt resonemang. Det är lätt att se detta i den algebraiska formeln. Hur då?

(g) Vad är summan av en rad i triangeln, d v s vad är

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}?$$

11. Låt M och N vara två ändliga mängder med m respektive n element.

    (a) Bestäm hur många olika funktioner $f : M \to N$ det finns.

    (b) Ange ett *nödvändigt* villkor på m och n för att funktionen $f : M \to N$ ska kunna vara injektiv, surjektiv respektive bijektiv.

    (c) Bestäm under lämpliga villkor på m och n hur många funktioner $f : M \to N$ det finns som är injektiva, surjektiva respektive bijektiva. Varning: Fallet med surjektiva är rätt svårt!

12. Titta på produkten

$$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y).$$

    (a) Om man multiplicerar ihop parenteserna* till höger får man en summa av termer av formen $x^k y^{5-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, eller hur? Hur många termer av formen x^5 får man? Hur många av formen x^4y? Hur många för $x^k y^{5-k}$ med $0 \le k \le 3$? Försök hitta ett allmänt uttryck för antalet termer av formen $x^k y^{5-k}$ och skriv produkten med hjälp av summasymbolen.

    (b) Generalisera resultatet till att gälla $(x + y)^n$ och jämför med binomialsatsen i boken.

Övning M

Vi avslutar med några extra uppgifter till de som har tid över.

1. I fotbollsallsvenskan deltar 16 lag. Alla lag möter varandra två gånger. Hur många matcher blir det totalt? Det går att lösa problemet på många olika sätt. Klarar ni minst två helt skilda sätt?

2. På hur många olika sätt kan man placera ut 12 olika krukväxter på 3 fönsterbänkar?

3. En tävling i amerikansk TV gick till på följande sätt: På scenen finns det tre dörrar. Den tävlande vet att det bakom precis en av dessa står det en Cadillac och att det bakom de två övriga två står det en get. Den tävlande ställer sig först framför en valfri dörr. Tävlingsledaren (som vet var bilen finns) öppnar nu en av de andra två dörrarna så att en get dyker upp. Den tävlande får nu välja att antingen öppna den dörr hon/han redan valt eller att byta till den andra stängda dörren och vinner sedan det som finns bakom. Bör man stå kvar, byta dörr eller spelar det ingen roll vilket man gör om man hellre vill vinna bilen än geten?

Uppgifter ur boken som rekommenderas för självstudier:

Kapitel 6: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 17.

*Gör det inte!