Kortfattade lösningsförslag - Dugga A 2018-11-22

1 Bestäm den allmänna lösningen till systemet
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 11x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}.$$

Lösning: Ställ upp systemets totalmatris och utför Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 11 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 11 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - s - 3t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$ Detta är systemets allmänna lösning.

---

2 a) Definiera begreppet bas i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Lösning: Se kursens kompendium.

b) Låt $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$. Låt $\bar{v}_1 = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{v}_2 = 7\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2$ och $\bar{v}_3 = -\bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Skriv $\bar{v}_3$ som en linjärkombination av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

Lösning: Vi söker c_1 och c_2 (reella tal) sådana att $\bar{v}_3 = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2$.

I koordinater (i basen $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$) blir detta $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Det följer att $\underline{\underline{\bar{v}_3 = -11\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2}}$

$\boxed{3}$ Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att om $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ så är vektorerna $\bar{u}-\bar{v}$ och $\bar{u}+\bar{v}$ ortogonala.

Lösning: $(\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\bar{v} - \underbrace{\bar{v}\cdot\bar{u}}_{=\bar{u}\cdot\bar{v}} - \bar{v}\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{u} + \cancel{\bar{u}\cdot\bar{v}} - \cancel{\bar{u}\cdot\bar{v}} - \bar{v}\cdot\bar{v}$

$$= |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 0$$

Enligt antagandet.

Alltså är $\bar{u}-\bar{v}$ och $\bar{u}+\bar{v}$ ortogonala.