Kortfattade lösningsförslag – Dugga A 2018-12-10

1 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm A:s egenvärden och motsvarande egenrum.

Lösning: i) A:s egenvärden: Den karaktäristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I_2)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

Lös ekvationen $(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ Detta är A:s egenvärden.

ii) Bestäm A:s egenrum: $\lambda_1 = 3$: Söker alla lösningar till $(A - 3I_2)\bar{x} = \bar{0}$.

Systemets totalmatris blir: $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Allmän lösning: $\bar{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Egenrummet blir alltså $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_2 = -1$: På samma sätt som ovan får vi att den allmänna lösningen till $(A + I_2)\bar{x} = \bar{0}$ är $\bar{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Egenrummet är $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

---

2 a) Definiera kolumnrummet och nollrummet till en $m \times n$-matris A.

Lösning: i) Kolumnrummet: $\operatorname{Col} A := \operatorname{span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$, där $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ betecknar matrisen A:s kolumner.

ii) Nollrummet: $\operatorname{Nul} A := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$.

Vi observerar att $\operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^m$ och $\operatorname{Nul} A \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Beräkna rangen av A samt bestäm dimensionen på Nul A.

Lösning: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Observera att pivotelementen finns i kolumn 1 och 2.

Alltså är kolumn 1 och 2 i matrisen A pivotkolumner. Det följer dessa utgör en bas i Col A, dvs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i Col A.

$\Rightarrow$ Rang $A = \dim(\mathrm{Col}\, A) = \underline{\underline{2}}$.

Rangsatsen ger till sist att $\dim(\mathrm{Nul}\, A) = (\text{Antalet kolumner i } A) - \text{rang}\, A = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$.

$\boxed{3}$ a) Bestäm standardmatrisen till den linjära avbildningen T som definieras genom
$T(x_1, x_2) = (2x_2 - 3x_1, x_1 - 4x_2, 0, x_2)$.

<u>Lösning</u>: Definiera $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och observera att $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_1 \\ x_1 - 4x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Det följer direkt att A är den sökta standardmatrisen.

b) Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Bevisa att det existerar en unik $m \times n$-matris A sådan att $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

<u>Lösning</u>: Se kursboken sid 88.
