Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren

Linjär algebra, MMG200 del 2
Höstterminen 2017

Exempeltentamen

Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivmateriel.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) Ange de tre olika typerna av elementära radoperationer.

   b) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   c) Låt A vara en kvadratisk matris och antag att A har en egenvektor $\boldsymbol{v}$ med egenvärde -1. Bestäm $A^7\boldsymbol{v}$.

   d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Låt A vara en $n \times n$-matris.

   a) Ge en definition för att matrisen A är ortogonalt diagonaliserbar.

   b) Bevisa att om A är en symmetrisk matris så är egenvektorer hörande till olika egenvärden ortogonala mot varandra.

3. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 4y + z = 2 \\ 2ax + 5y + z = 1 \\ 2x - ay - z = -4 \end{cases}$$

   för varje värde på den reella konstanten a.

4. En matrisavbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4, -x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4).$$

   a) Bestäm avbildningens (standard-) matris A.

   b) Bestäm en ON-bas i matrisen A:s nollrum.

5. Låt ℓ_1 vara linjen som ges av ekvationen $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, 3, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt ℓ_2 vara linjen som ges av ekvationen $(x, y, z) = (1, -1, 0) + s(1, 2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$. Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som skär både ℓ_1 och ℓ_2 vinkelrätt.

6. I ett experiment studeras två storheter x och y. Under experimentet genomförs mätningar av dessa storheter vid fyra tidpunkter och resultaten ges i följande tabell:

x	2	5	7	8
y	1	2	3	3

Vi tolkar detta som fyra punkter i xy-planet. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = kx + m$ till ovanstående mätdata.

7. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}.$$

(Här är $x_1(t)$ och $x_2(t)$ deriverbara funktioner definierade på $\mathbb{R}$.)

8. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1, \qquad T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2, \qquad T(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{v}_3,$$

där

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm T:s standardmatris och avgör om T är inverterbar.

Lycka till!