Göteborgs Universitet
**Institutionen för Matematiska Vetenskaper**
Anders Södergren

MMG200 - Linjär algebra, 7.5hp
2018-11-05

# Inlämningsuppgift

Arbetet med uppgiften kan göras enskilt eller i grupper om två, men redovisningen ska ske enskilt och det ska framgå vilka som har samarbetat. **Lösningarna ska lämnas in senast onsdag 5/12.** För att lösningarna ska beaktas ska de lämnas in i tid.

Inlämningsuppgiften ska lösas med hjälp av Matlab. Det betyder speciellt att alla beräkningar ska göras i Matlab och att om ni ombeds att bevisa något så ska detta ske med utgångspunkt från beräkningar utförda i Matlab. En fullständig lösning ska innehålla förklarande text och vara noggrant redovisad. Det ska gå att följa resonemanget; det räcker alltså inte att svaret är korrekt.

Om du känner att du behöver fräscha upp dina Matlabkunskaper innan du löser dessa uppgifter så finns det tips om lämplig litteratur på kurshemsidan (se särskilt filerna *Matriser och vektorer i Matlab* och *Symboliska beräkningar med Matlab*). Dessutom kräver uppgift 1a) viss förståelse av determinanter. Ni kan hitta den information ni behöver i kursbokens kapitel 3.1-3.2 och detta kräver en viss grad av självstudier om ni inte vill vänta in i det sista med att lösa den deluppgiften.

---

1. Den här uppgiften handlar om *Hilbertmatriser*. Hilbertmatriser ger typiskt upphov till (numeriskt) svårlösta ekvationssystem. Detta beror på att Hilbertmatriser är illa konditionerade vilket betyder att de förstorar fel i högerledet (som till exempel kan bero på avrundning) väldigt mycket.

   a) Bilda en $10 \times 10$-Hilbertmatris med hjälp av Matlabkommandot $A = \text{hilb}(10)$. Visa att matrisen är inverterbar genom att beräkna dess determinant. (Om du vill veta hur man beräknar determinanter i Matlab så frågar du med fördel Matlabs hjälpfuktion genom att skriva *help det* i kommandofönstret.)

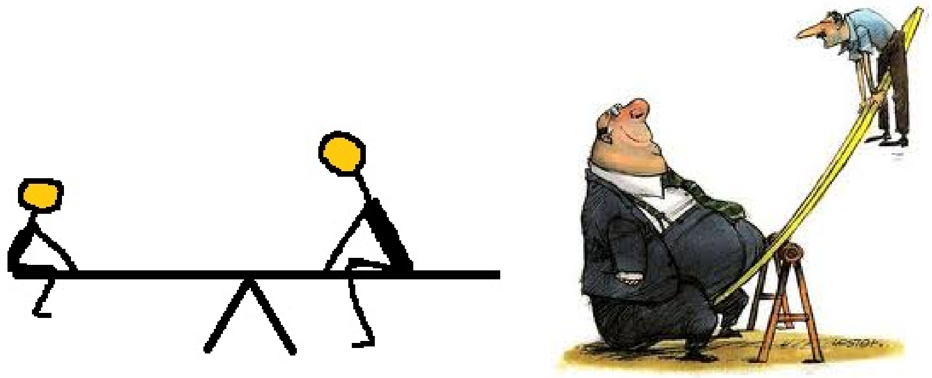
   b) Skapa nu en vektor $\boldsymbol{x_{exakt}} \in \mathbb{R}^{10}$ med enbart ettor som koordinater (använd till exempel Matlabkomandot ones för att åstadkomma detta). Definiera sedan ytterligare en vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{10}$ genom $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x_{exakt}}$. Förklara hur det följer av diskussionen ovan att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har den unika lösningen $\boldsymbol{x_{exakt}}$ som består av enbart ettor.

   c) Observera att så här långt har vi inte löst något ekvationssystem utan endast konstruerat ett ekvationssystem som vi vet lösningen till. Lös nu systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med hjälp av Matlabs backslash-kommando. Kalla denna lösning $\boldsymbol{x_{backslash}}$. Vad kan du dra för slutsats av resultatet?

   d) Ett annat sätt att lösa ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är att använda inversen till matrisen $A$. I Matlab beräknar man inverser med hjälp av kommandot inv. Använd detta tillsammans med Sats 5 (kapitel 2) från kursboken för att lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Kalla denna lösning $\boldsymbol{x_{inv}}$. Vad kan du dra för slutsats av resultatet? Jämför också med resultatet i c).

   e) Gör det någon skillnad i uppgifterna ovan om ni använder er av symboliska beräkningar? Motivera ditt svar genom att utföra (och bifoga) lämpliga beräkningar.

   f) Uppgifterna ovan behandlar $10 \times 10$-Hilbertmatrisen $A$. Vi kunde lika gärna låtit $A$ vara en $k \times k$-Hilbertmatris för något annat positivt heltal $k$ och löst motsvarande uppgifter för denna matris (då hade vektorerna ovan varit vektorer i $\mathbb{R}^k$ i stället för vektorer i $\mathbb{R}^{10}$). Vilket är det minsta värdet på $k$ sådant att fenomenet i deluppgifterna c) och d) förekommer? Även här ska svaret motiveras med hjälp av lämpliga beräkningar.



Figur 1: Bilderna illustrerar skillnaden mellan jämvikt (till vänster) och obalans (till höger) på en gungbräda.

2. Den här uppgiften studerar ett mekaniskt problem om en (oändligt lång) gungbräda som barnen $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ och $B_6$ vill leka med. För enkelhets skull antar vi att gungbrädan är placerad längs den reella tallinjen och att dess vridpunkt hamnar i punkten $x = 0$. Barnen har de kända massorna $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ och deras position på brädan betecknas med $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Observera att dessa positioner är negativa på ena sidan om vridpunkten!

   För att det ska råda momentjämvikt på gungbrädan, det vill säga för att gungbrädan inte ska börja gunga, måste villkoret

$$\sum_{k=1}^{6} m_k x_k = 0 \tag{1}$$

   vara uppfyllt. Detta är en linjär ekvation i de obekanta $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ och $x_6$, men för att gungbrädan ska ge upphov till ett intressant problem i linjär algebra lägger vi till ett antal bivillkor.

   a) Antag att vi förutom (1) vet att $2x_1 = x_2 = x_3$, $x_1 = -x_4$ och $x_4 = x_5 = \frac{1}{3}x_6$. Rita en figur (detta behöver inte göras i Matlab) och tolka vad dessa villkor betyder.

   b) Jämviktsekvationen tillsammans med bivillkoren i a) bildar ett linjärt ekvationssystem. Ange ekvationssystemet på formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   c) Antag att alla barnen väger 10 kg. Ange och beskriv den allmänna lösningen till ekvationssystemet i det här fallet.

   d) Visa med hjälp av ett exempel, där inte alla barnens massor är lika, att ekvationssystemet från b) har icketriviala lösningar då $m_1 + 2m_2 + 2m_3 = m_4 + m_5 + 3m_6$.

   e) Bevisa att ekvationssystemet från b) alltid har icketriviala lösningar då $m_1 + 2m_2 + 2m_3 = m_4 + m_5 + 3m_6$. Ledning: I den här deluppgiften kan det vara fördelaktigt att använda sig av symboliska beräkningar i Matlab.

Lycka till!