Lösningsförslag – Tentamen 2018-12-20

1 a) $AB + A = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 17 \end{pmatrix}$.

b) Falskt.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix} = 180$.

d) Ett exempel är $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

---

2 Se kursboken sid 300-301.

---

3 Vi tittar på den första raden och ser att fallet $a=0$ är enkelt att undersöka separat. Nämligen, då $a=0$ blir totalmatrisen $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right]$.

Genom att betrakta den första raden så ser vi att i detta fallet <u>saknas lösningar</u>.

Vi antar nu att $a \neq 0$. Totalmatrisen blir då:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & a & a & 1 \\ 2 & a+3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & a+4 & 5 \end{array}\right] \cdot\frac{1}{a} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 2 & a+3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & a+4 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & a+1 & 2 & \frac{4a-2}{a} \\ 0 & 2 & a+1 & \frac{5a-3}{a} \end{array}\right] \cdot\frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & \frac{5a-3}{2a} \\ 0 & a+1 & 2 & \frac{4a-2}{a} \end{array}\right] -(a+1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & \frac{5a-3}{2a} \\ 0 & 0 & 2-\frac{(a+1)^2}{2} & \frac{4a-2}{a} - (a+1)\frac{5a-3}{2a} \end{array}\right]$$

2

Observera: i) $2 - \frac{(a+1)^2}{2} = -\frac{1}{2}(a^2+2a-3) = -\frac{1}{2}(a+3)(a-1)$

ii) $\frac{4a-2}{a} - (a+1)\left(\frac{5a-3}{2a}\right) = 3 - \frac{5}{2}a - \frac{1}{2a} = -\frac{5}{2a}\left(a^2 - \frac{6}{5}a + \frac{1}{5}\right) = -\frac{5}{2a}(a-1)(a-\frac{1}{5})$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & \frac{5a-3}{2a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a+3)(a-1) & -\frac{5}{2a}(a-1)(a-\frac{1}{5}) \end{array}\right] \quad (*)$$

Vi går vidare genom att dela upp i olika fall. Dessa löses separat.

Fall 1, $a=-3$: $(*)$ blir då
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} \end{array}\right] \leftarrow ⚠$$

Vi ser att i detta fall saknas det lösningar.

Fall 2, $a=1$: $(*)$ blir då
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi väljer z som fri variabel; sätter $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Den allmänna lösningen blir då

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Fall 3; $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-3\}$: Vi multiplicerar sista raden i $(*)$ med $\frac{-2}{(a+3)(a-1)}$. $(*)$ blir då:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & \frac{5a-3}{2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-1}{a(a+3)} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \leftarrow \\ -\left(\frac{a+1}{2}\right) \quad (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{4-4a}{a(a+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4(a-1)}{a(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-1}{a(a+3)} \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1) \\ \end{array}$$

Obs: i) $\frac{1}{a} - \frac{5a-1}{a(a+3)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{4-4a}{a+3}$

ii) $\frac{5a-3}{2a} - \frac{a+1}{2}\cdot\frac{5a-1}{a(a+3)} = \frac{1}{2a(a+3)}\cdot(8a-8) = \frac{4(a-1)}{a(a+3)}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8(1-a)}{a(a+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4(a-1)}{a(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-1}{a(a+3)} \end{array}\right]$$

I det här fallet har systemet alltså den entydiga lösningen

$$(x,y,z) = \left(\frac{8(1-a)}{a(a+3)}, \frac{4(a-1)}{a(a+3)}, \frac{5a-1}{a(a+3)}\right).$$

$\boxed{4}$ a) Ställ upp totalmatrisen och använd Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] (2)\ (-1)\ (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] (-1/4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7/4 \end{array}\right]$$

Vi ser att lösning(ar) saknas.

b) Minsta-kvadratlösningen till $A\bar{x}=\bar{b}$ sammanfaller med lösningen till normalekvationen

$$A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

och att

$$A^T\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Totalmatrisen för normalekvationen blir alltså:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (\times\tfrac{1}{3}) \\ \times(-\tfrac{1}{2}) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] (-7) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 17/2 & 15 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{17} \end{array}\right] \left(\frac{3}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & +\frac{11}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{17} \end{array}\right]$$

Alltså är $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{17} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{30}{17} \end{pmatrix}$ den sökta minstakvadratlösningen.

$\boxed{5}$ a) Observera att A är symmetrisk. Alltså är A ortogonalt diagonaliserbar.

Steg 1: Bestäm A's egenvärden: Ställ upp den karaktäristiska ekvationen:

$$0 = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Kofaktorutveckling längs rad 1.

Kofaktorutveckling längs rad 2

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(\lambda-2)^3.$$

$\Rightarrow$ A's egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ och $\lambda_4 = 0$.

Steg 2: Bestäm ON-baser i motsvarande egenrum.

Egenrummet hörande till $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$: Vi löser ekvationssystemet $(A - 2I_4)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fria variabler.

Allmän lösning: $\bar{x} = \begin{pmatrix} r \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{v}_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{v}_3} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{v}_2}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en bas i egenrummet E_2 hörande till $\lambda = 2$, dvs $E_2 =$

$= \text{span } B = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Observera nu att $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = 0$.

Alltså är B en ortogonal bas i E_2. Det återstår att normera $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$:

$\left\{ \bar{v}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{v}_2, \bar{v}_3 \right\}$ är en ON-bas i E_2.

Egenrummet hörande till $\lambda_4 = 0$: Vi löser ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{0}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Allmän lösning: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i egenrummet hörande till $\lambda_4 = 0$. $\xrightarrow{\text{(Normera!)}}$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

är en ON-bas i detta egenrum.

Steg 3: Skapa matrisen P: Ställ egenrummens respektive ON-baser som kolumner i P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Obs: P är en ortogonal matris $\Rightarrow P^{-1} = P^T$.

Steg 4: Skapa matrisen D: Ställ motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen i D:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

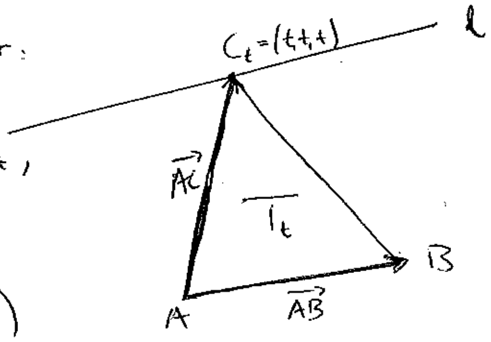
Med dessa matriser P och D gäller nu $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

b) $$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = PD^{100}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$\underset{P^{-1}=P^T}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{99} & 0 & 2^{99} \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{99} & 0 & 2^{99} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ a) Vi beskriver problemet med följande figur:



Vi låter hörnet på linjen l betecknas med C_t, så att $C_t = (t,t,t)$.

Observera att $\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)-(1,0,1) = (0,-1,-1)$

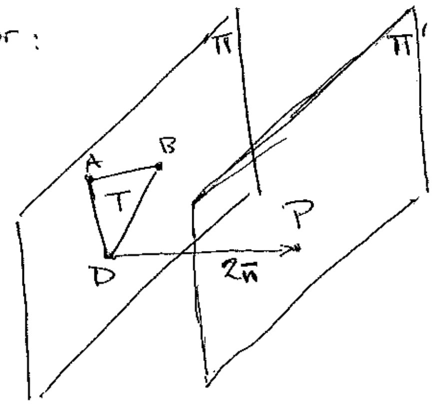
och att $\overrightarrow{AC_t} = (t,t,t)-(1,0,1) = (t-1,t,t-1)$.

Från definitionen av kryssprodukt får vi att $\text{area}(T_t) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC_t}\right| =$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -1 & -1\\ t-1 & t & t-1\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(1-t+t,\ 1-t,\ t-1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(1-t)^2+(t-1)^2}$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1+2(t-1)^2}$. Denna area är som minst när $t=1$ (för då är $(t-1)^2=0$). Den minimala arean blir $\text{area}(T_{min}) = \frac{1}{2}\sqrt{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

b) Vi skissar en figur:



Observera att $D = C_0 = (0,0,0)$. I a) beräknade vi en normalvektor till Π, nämligen $\bar{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (1,1,-1)$.

Vi kallar det sökta planet Π' (detta är alltså ett av de två plan som är parallella med Π och på avstånd $2\sqrt{3}$ till Π). För att bestämma Π':s ekvation behöver vi i) en punkt i Π' och ii) en normalvektor till Π'.

ii) Eftersom Π' är parallellt med Π så är $\bar{n}$ en normalvektor även till planet Π'.

i) Kvarstår att bestämma en punkt P i Π'. Notera att $|\bar{n}| = \sqrt{3}$. Alltså är $|2\bar{n}| = 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $2\bar{n}$ är vinkelrät mot både Π och Π' och har längden $2\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Vi kan välja $P = D + 2\bar{n} = (2,2,-2)$. Detta ger Π':s ekvation:

$(x-2)+(y-2)-(z+2) = 0 \iff \boxed{x+y-z=6}$

[7] a) Se kursens kompendium sid 30.

b) Observera att $f(\bar{e}_1) = \text{proj}_{\bar{v}}\, \bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{v} \times \bar{e}_1 = \left(\frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\right)\bar{v} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{v} + \frac{1}{3}(0,\ 1,\ -1) = \frac{1}{3}(1,2,0)$$

På samma sätt får vi även $f(\bar{e}_2) = \frac{1}{3}(0,1,2)$ och $f(\bar{e}_3) = \frac{1}{3}(2,0,1)$.

(Här är $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^3$.) Det följer att standardmatrisen är

$$A = \left[\, f(\bar{e}_1) \quad f(\bar{e}_2) \quad f(\bar{e}_3) \,\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Till sist: Avbildningen f är inverterbar omm dess standardmatris A är inverterbar.

Vi ser att $\det A = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$. Det följer

att A är inverterbar $\Rightarrow$ f är inverterbar.

c) Antag att $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Då gäller $\bar{x} - \text{proj}_{\bar{v}}\, \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{v} \times \bar{x}$. (#)

I (#) gäller $\begin{cases} \bar{x} - \text{proj}_{\bar{v}}\, \bar{x} \in \text{span}\{\bar{x}, \bar{v}\} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{v}\times\bar{x} \text{ är ortogonal mot } \bar{v} \text{ och } \bar{x} \text{, dvs ortogonal mot span}\{\bar{v},\bar{x}\}. \end{cases}$

$\Rightarrow$ VL och HL i (#) är ortogonala mot varandra. Två mot varandra

ortogonala vektorer kan bara vara lika om båda vektorerna är $= \bar{0}$.

$$\Rightarrow \bar{x} - \text{proj}_{\bar{v}}\, \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{v}\times\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{cases} \bar{x} = \text{proj}_{\bar{v}}\, \bar{x} \\ \bar{v}\times\bar{x} = \bar{0} \end{cases} \iff \bar{x} = t\bar{v},\ t\in\mathbb{R}.$$

Alltså gäller: $f(\bar{x}) = \bar{x}$ omm $\bar{x} = t\bar{v}$, $t\in\mathbb{R}$ omm $\bar{x}$ är parallell med $\bar{v}$.

8

$\boxed{8}$ ($\Longrightarrow$) Antag att A har linjärt oberoende kolumner. Vi observerar att A^TA är kvadratisk (storlek $n\times n$). För att visa att A^TA är inverterbar räcker det att visa att det homogena ekvationssystemet $A^TA\bar{x}=\bar{0}$ endast har den triviala lösningen. Låt $\bar{x}_0$ vara en godtycklig lösning till detta system. Då gäller:

i) Eftersom $A^T(A\bar{x}_0)=\bar{0}$, så har vi $A\bar{x}_0 \in \mathrm{Nul}(A^T)$.

ii) Dessutom, per definition, gäller $A\bar{x}_0 \in \mathrm{Col}(A)$.

Från kursboken Kapitel 6.1 vet vi att $\mathrm{Col}(A) \perp \mathrm{Nul}(A^T)$ (dvs att $\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$)

Precis som i uppgift 7c, gäller i allmänhet att om $W \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett delrum så är $W \cap W^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Alltså följer det att $A\bar{x}_0 \in \mathrm{Col}(A) \cap \mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{Col}(A) \cap \mathrm{Col}(A)^{\perp}$

$\Rightarrow A\bar{x}_0 = \bar{0}$. Till sist använder vi att A har linjärt oberoende kolumner för att se att $A\bar{x}_0 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_0 = \bar{0}$. Det följer (enligt ovan) att A^TA är inverterbar.

($\Longleftarrow$) Vi visar det kontrapositiva påståendet. Antag alltså att A:s kolumner $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ är linjärt beroende. Vi använder SATS 7 (sid 75) för att dra slutsatsen att minst en av A:s kolumner, säg $\bar{a}_j$, kan skrivas som en linjär kombination av de andra kolumnerna: $\bar{a}_j = \sum_{k\neq j} c_k \bar{a}_k$. Observera nu att

$$A^TA = A^T[\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n] = [A^T\bar{a}_1\; A^T\bar{a}_2\; \ldots\; A^T\bar{a}_n] = [\bar{b}_1\, \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n]$$, där $\bar{b}_k = A^T\bar{a}_k$.

Här gäller nu: $\bar{b}_j = A^T\bar{a}_j = A^T\left(\sum_{k\neq j} c_k \bar{a}_k\right) = \sum_{k\neq j} c_k A^T\bar{a}_k = \sum_{k\neq j} c_k \bar{b}_k$

Det följer att kolumnerna i A^TA, dvs $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$, är linjärt beroende

$\Rightarrow A^TA$ är inte inverterbar.

□