Lösningsförslag - Tentamen 2019-04-24

$\boxed{1}$ a) $A^{-1} = \frac{1}{111}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$.

b) Falskt.

c) $\bar{x} \cdot (AB\bar{y}) = 57$.

d) Ett exempel är $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ a) Se kursboken sid 166.

b) Se kursboken sid 351-352.

$\boxed{3}$ Vi studerar den första raden/ekvationen och noterar att fallet $a=0$ är enkelt och naturligt att undersöka separat. Då $a=0$ blir totalmatrisen $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right]$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sätt $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Den allmänna lösningen blir då $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-8t \\ -2+4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

Vi antar nu att $a \neq 0$. Totalmatrisen blir då:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & a & a & a \\ 2 & a+3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & a+4 & 5 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{a} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a+3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & a+4 & 5 \end{array}\right] (-2)(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & a+1 & 2 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{2}.$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{array}\right] -(a+1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2-\frac{(a+1)^2}{2} & 1-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a+3)(a-1) & 1-a \end{array}\right] \quad (*)$$

Vi fortsätter genom att dela upp i olika fall. Dessa löses separat.

Fall 1, $a=-3$: $(*)$ blir då $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$.

Vi ser att i detta fallet saknas det lösningar (observera utseendet på sista raden).

Fall 2, $a=1$: $(*)$ blir då $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Sätt $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Den allmänna lösningen blir då $\bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

Fall 3, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-3\}$: Multiplicera sista raden i $(*)$ med $\frac{-2}{(a+3)(a-1)}$. $(*)$ blir då:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+3} \end{array}\right] -\left(\frac{a+1}{2}\right) \ (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{a+1}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+3} \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+3} \end{array}\right].$$

I det här fallet har systemet den entydiga lösningen $(x,y,z)=\left(\frac{a-1}{a+3}, \frac{2}{a+3}, \frac{2}{a+3}\right)$

$\boxed{4}$ a) Vi observerar att $F(\bar{e}_1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(\bar{e}_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\bar{e}_3)=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

och $F(\bar{e}_4)=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$.

Det följer att standardmatrisen är $A=\left(F(\bar{e}_1)\ F(\bar{e}_2)\ F(\bar{e}_3)\ F(\bar{e}_4)\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Bestäm en trappstegsmatris R till A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} (-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1) \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\cdot\tfrac{1}{2}) \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Vi ser nu att pivotkolumnerna i R är kolumn 1 och 2. Det betyder att kolumn 1 och 2 i A är pivotkolumner och att de utgör en bas i Col A.

<u>Alltså</u>: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i Col A = A:s kolumnrum.

Vi löser nu systemet $A\bar{x} = \bar{0}$ genom att observera: $\left[A \mid \bar{0} \right] \sim \left[R \mid \bar{0} \right]$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2} x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Det finns 2 fria variabler x_3 och x_4. Sätt $x_3 = s$ och $x_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$. Då får vi den allmänna lösningen

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + \frac{1}{2}t \\ 2s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Vi får att $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i Nul A = A:s nollrum.

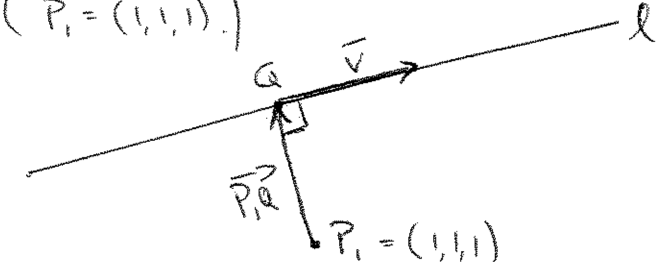
---

c) F är injektiv omm kolumnerna i standardmatrisen A är linjärt oberoende.
omm $A\bar{x} = \bar{0}$ endast har den triviala lösningen $\bar{x} = \bar{0}$.

I uppgift 4b) har vi visat att $A\bar{x} = \bar{0}$ har <u>oändligt många lösningar</u>. Alltså ~~[illegible]~~ är F inte injektiv.

$\boxed{5}$ a) Låt P_1, P_2 och P_3 vara de givna punkterna. Då gäller det att $\bar{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,1)$ och $\bar{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,1,1)$ båda är parallella med planet Π i uppgiften. Det följer att
$$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,1)$$
är en normalvektor till planet Π. Genom att använda vektorn $\bar{n}$ och punkten $P_1=(1,1,1)$ får vi planets ekvation:
$$-(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0 \iff \underline{\underline{x+2y-z=2}}$$
Skärningspunkten mellan l och Π uppfyller både l:s och Π:s ekvationer. Vi "sätter in" linjens ekvation i planets ekvation; detta ger $(2+t) + 2(-4) - (4-2t) = 2$
$$\iff 3t = 12 \iff \underline{\underline{t=4}}$$
Till sist får vi den sökta skärningspunkten S genom att sätta in detta t-värde i linjens ekvation: $S = (2,-4,4) + 4(1,0,-2) = \underline{\underline{(6,-4,-4)}}$.

b) Linjen l har riktningsvektorn $\bar{v} = (1,0,-2)$. Vi söker den punkt $Q=(x,y,z)\in l$ som uppfyller $\overrightarrow{P_1Q} \perp \bar{v}$. $(P_1 = (1,1,1))$



Här gäller $\overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (x,y,z) - (1,1,1) \underset{Q\in l}{=} (1+t, -5, 3-2t)$ för något $t \in \mathbb{R}$.

Vi undersöker nu $0 = \overrightarrow{P_1Q} \cdot \bar{v} = (1+t, -5, 3-2t)\cdot(1,0,-2) =$
$$= 1+t-6+4t = -5+5t \iff \underline{\underline{t=1}}.$$
Det följer att $\overrightarrow{P_1Q} = (2,-5,1)$ (och alltså även att $Q = (3,-4,2)$).

Det sökta avståndet = längden av vektorn $\overrightarrow{P_1Q} = |\overrightarrow{P_1Q}| = \sqrt{2^2+(-5)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$.

6 a) Om A är en $m \times n$-matris och $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ så är en <u>minstakvadratlösning</u> till ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ en vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Det tillhörande <u>minstakvadratfelet</u> är $\|A\hat{x} - b\|$ = avståndet från $\bar{b}$ till $A\hat{x}$ (då $\hat{x}$ är en minstakvadratlösning).

b) Observera att $B = \{\bar{u}, \bar{v}\}$ <u>inte</u> är en ortogonal bas i W (ty $\bar{u} \cdot \bar{v} = 4 - 3 - 2 - 1 = -2$). För att kunna använda SATS 6.8 i kursboken (sid 366) använder vi <u>Gram-Schmidt</u> för att omvandla den givna basen till en <u>ortogonal</u> bas i W. Sätt $\bar{w}_1 = \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och fortsätt sedan efter standardreceptet.

$$\bar{w}_2 = \bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1} \bar{v} = \bar{v} - \left(\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\right) \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sätt $\bar{w}_2' = 2\bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2'\}$ är nu en ortogonal bas i W.

Enligt SATS 6.8 får vi nu $\bar{y}$ som den ortogonala projektionen av $\bar{x}$ på W:

$$\bar{y} \underset{\text{Definitionen av ortogonal projektion på ett delrum.}}{=} \frac{\bar{x} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1} \bar{w}_1 + \frac{\bar{x} \cdot \bar{w}_2'}{\bar{w}_2' \cdot \bar{w}_2'} \bar{w}_2' = \frac{16}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{116/3}{116} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7/3 \\ 3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

Till sist bestämmer vi $\bar{z}$ som $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = \begin{pmatrix} 23/3 \\ -4 \\ 3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -7/3 \\ 3 \\ 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ -7/3 \end{pmatrix}$

Från beräkningen är det klart att $\bar{y} \in W$. Vi kontrollerar nu att

i) $\bar{y} + \bar{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7/3 \\ 3 \\ 11/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ -7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/3 \\ -4 \\ 3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \bar{x}$.

ii) $\begin{cases} \bar{z} \cdot \bar{w}_1 = 2/3 + 5/3 - 7/3 = 0 \\ \bar{z} \cdot \bar{w}_2' = 6 - 25/3 + 7/3 = 0 \end{cases}$ så $z \in W^{\perp}$.

7 a) i) En nollskild vektor $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ som uppfyller $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$ för någon konstant $\lambda\in\mathbb{R}$ kallas för en <u>egenvektor</u> till A.

ii) Ett tal $\lambda\in\mathbb{R}$ kallas för ett <u>egenvärde</u> till A om det finns en icketrivial lösning $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ till ekvationen $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$.

iii) Mängden av lösningar till $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$ och kallas A's <u>egenrum</u> hörande till egenvärdet λ.

b) Observera att matrisen A är <u>symmetrisk</u>. Alltså är A ortogonalt diagonaliserbar.

<u>Steg 1: Bestäm A's egenvärden:</u> Den karaktäristiska ekvationen är $0=\det(A-\lambda I_3)=$

$$=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Kofaktorutv. längs rad 1

$$=\dots=-\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda+7=(\lambda-1)(-\lambda^2+8\lambda-7)=-(\lambda-1)^2(\lambda-7).$$

Faktoriserar genom att söka efter en rot.

$\Rightarrow$ A's egenvärden är $\lambda_1=\lambda_2=1$ och $\lambda_3=7$.

<u>Steg 2: Bestäm motsvarande egenrum:</u>

<u>Egenrummet hörande till $\lambda_1=\lambda_2=1$:</u> Vi löser ekvationssystemet $(A-I_3)\bar{x}=\bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

<u>Allmän lösning:</u>

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_2}$$

$s,t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow B=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ är en bas i egenrummet E_1 hörande till $\lambda=1$, dvs $E_1=\operatorname{span} B=\operatorname{span}\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$

Använd nu Gram–Schmidts metod för att omvandla detta till en ON-bas:

$\bar{v}_1=\bar{u}_1$,

$$\bar{v}_2=\bar{u}_2-\operatorname{proj}_{\bar{v}_1}\bar{u}_2=\bar{u}_2-\frac{\bar{u}_2\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}\bar{v}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det följer att $B'=\{\underbrace{\bar{v}_1}_{=\bar{w}_1},\ \underbrace{2\bar{v}_2}_{=\bar{w}_2}\}$ är en <u>ortogonal</u> bas i egenrummet E_1.

Till sist normerar vi vektorerna i B': $B'' = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$ är en <u>ON-bas</u> i E_1. [redacted]

<u>Egenrummet hörande till $\lambda_3 = 7$</u>: Vi löser ekvationssystemet $(A - 7I_3)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 & -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 2 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

<u>Allmän lösning</u>: $\bar{x} = t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{w}_3}, t \in \mathbb{R}$

Det följer direkt att $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$ är en <u>ON-bas</u> i egenrummet. [redacted]

<u>Steg 3: Skapa matrisen P</u>: Ställ egenrummens respektive ON-baser som kolumner i P:

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

P är en <u>ortogonal matris</u> $\Rightarrow P^{-1} = P^T$.

<u>Steg 4: Skapa matrisen D</u>: Ställ motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen i D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Med dessa matriser P och D gäller nu $A = PDP^{-1} = \underline{\underline{PDP^T}}$.

c) $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$. Vi kan alltså hitta $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ s.a. $\bar{x}_0 = c_1\bar{w}_1 + c_2\bar{w}_2 + c_3\bar{w}_3$. För att bestämma dessa koefficienter löser vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \times\frac{1}{3} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ 1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Använd nu att $\boxed{A\bar{w}_i = \lambda_i \bar{w}_i \ , \ 1 \le i \le 3}_{(*)}$, där $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 7$:

$$\bar{x}_1 = A\bar{x}_0 = A(3\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3) = 3A\bar{w}_1 + A\bar{w}_2 - A\bar{w}_3 = 3\lambda_1\bar{w}_1 + \lambda_2\bar{w}_2 - \lambda_3\bar{w}_3 .$$

För allmänt $k \geq 0$ får vi $\boxed{\bar{x}_k = 3\lambda_1^k\bar{w}_1 + \lambda_2^k\bar{w}_2 - \lambda_3^k\bar{w}_3}$. Detta visar vi med induktion, där vi redan visat bassteget ovan. Antag nu att formeln ovan är korrekt för $k=m$ och studera sedan fallet $k=m+1$. Då gäller:

$$\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1} = A\bar{x}_m \underset{\text{Induktionsant.}}{=} A(3\lambda_1^m\bar{w}_1 + \lambda_2^m\bar{w}_2 - \lambda_3^m\bar{w}_3) = 3\lambda_1^m A\bar{w}_1 + \lambda_2^m A\bar{w}_2 - \lambda_3^m A\bar{w}_3$$

$$\underset{(*)}{=} 3\lambda_1^{m+1}\bar{w}_1 + \lambda_2^{m+1}\bar{w}_2 - \lambda_3^{m+1}\bar{w}_3 = 3\lambda_1^k\bar{w}_1 + \lambda_2^k\bar{w}_2 - \lambda_3^k\bar{w}_3 .$$

Enligt induktionsprincipen är formeln korrekt för alla $k \geq 0$. Detta är den sökta allmänna lösningen:

$$\bar{x}_k = 3\lambda_1^k\bar{w}_1 + \lambda_2^k\bar{w}_2 - \lambda_3^k\bar{w}_3 \underset{\boxed{\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=7}}{=} 3\cdot\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - 7^k\bar{w}_3 =$$

$$= 3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} - 7^k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} - 7^k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad k \geq 0 .$$

$\boxed{8}$ a) Se kursboken sid 190.

b) Vi beräknar determinanten m.h.a kolumn- och rad-operationer:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^n x_k & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1+\sum_{k=1}^n x_k & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1+\sum_{k=1}^n x_k & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\sum_{k=1}^n x_k & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

Observera att alla element i kolumn 1 har en gemensam faktor $1+\sum_{k=1}^n x_k$. Bryt ut den!

$$= \left(1+\sum_{k=1}^n x_k\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{k=1}^n x_k\right)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Triangulär matris med 1:or på diagonalen}}$$

$$= \left(1+\sum_{k=1}^n x_k\right)\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdots1}_{n\text{ stycken}} = \underline{\underline{1+\sum_{k=1}^n x_k}}$$