

1 a) $\det(AB) = -56$.

b) Falskt.

c) $\bar{x} \times (A\bar{y}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

d) (1) och (-1).

2 a) Se kursboken sid 76.

b) Se kursboken sid 414.

3 a) En icke-tom mängd $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas linjärt oberoende om vektorekvationen $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \dots + x_r\bar{v}_r = \bar{0}$ endast har den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$.

b) Vi ställer upp totalmatrisen för systemet och fortsätter sedan med Gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 8 & -1 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 9 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & -1 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 9 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-1} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(2)

Vi läser nu av lösningarna till systemet: Det är inga ledande 1:or i kolumnerna 3 och 5; dessa "blir" fria variabler. Sätt $x_3 = s$ och $x_5 = t$. Från den reducerade trappstegsmatrisen får vi då:

$$\begin{cases} x_1 = -2 - s - 2t \\ x_2 = 3 - 2s - t \\ x_4 = 1 + 2t \end{cases}$$

Svar: Lösningarna är $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2 - s - 2t, 3 - 2s - t, s, 1 + 2t, t)$
 $s, t \in \mathbb{R}$

[4] Minstakvadratlösningarna till $A\bar{x} = \bar{b}$ sammanfaller med lösningarna till normal ekvationen $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$. Vi bestämmer alltså $A^T A$ och $A^T \bar{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det följer att $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

och att $A^T \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Totalmatrisen för normal ekvationen blir alltså: $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$ $\begin{matrix} \times \frac{1}{6} \\ \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{2} \end{matrix}$
 Vi fortsätter med Gausselimination.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} (-3) \quad (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} \times (-1) \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \swarrow \searrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{-1} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcircled{1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcircled{-1} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (*)$$

Vi läser nu direkt av lösningarna till

normal ekvationen. Sätt $x_4 = t$ som fri variabel. Från (*) får vi då:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - t \\ x_2 = -5 + t \\ x_3 = -2 + t \end{cases}$$

Den allmänna lösningen är alltså: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Enligt ovan är detta alla de sista minstakvadratlösningarna till $A\bar{x} = \bar{b}$.

5 a) Observera att $F(\bar{e}_1) = (1)$, $F(\bar{e}_2) = (-1)$, $F(\bar{e}_3) = (1)$, $F(\bar{e}_4) = (-1)$

där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ är standardbasvektorer i $\mathbb{R}^4$. Det följer att standardmatrisen är $A = (F(\bar{e}_1) \ F(\bar{e}_2) \ F(\bar{e}_3) \ F(\bar{e}_4)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Observera att A 's nollrum består av alla lösningar till ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{0}$.

Vi löser alltså $(A \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$. Detta system är redan i reducerad trappstegsform. Det finns 3 fria variabler x_2, x_3 och x_4 , och den allmänna lösningen är

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_2} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{u}_3}$$

där $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Det följer att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ spänner upp $\text{Nul } A$.

Eftersom $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ dessutom är (tydligt) linjärt oberoende så utgör de en bas (4)

för $N(A)$. Använd nu Gram-Schmidts process för att omvandla detta till en ortogonal bas:

Sätt $\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och fortsätt sedan efter standardproceduren.

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \text{proj}_{\bar{v}_1} \bar{u}_2 = \bar{u}_2 - \left(\frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \right) \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sätt $\bar{v}_2' = 2\bar{v}_2$. $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2'\}$ är nu en ortogonal bas i $W = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2'\} = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \text{proj}_W \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \left(\frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \right) \bar{v}_1 - \left(\frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2'}{\bar{v}_2' \cdot \bar{v}_2'} \right) \bar{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sätt $\bar{v}_3' = 3\bar{v}_3$.

Enligt Gram-Schmidts process är nu $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2', \bar{v}_3'\}$ en ortogonal bas i $N(A)$.

Till sist normaliserar vi denna bas för att få en ON-bas:

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\|\bar{v}_1\|} \bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2'\|} \bar{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_3 = \frac{1}{\|\bar{v}_3'\|} \bar{v}_3' = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Här gäller: $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ är en ON-bas i $N(A)$.

[6] a) * En nollskild vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$ kallas för en eigenvektor till A .

* Ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ kallas för ett eigenvärde till A om det finns en icke-trivial lösning $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ till ekvationen $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

* Antag att λ är ett eigenvärde till A .
* Mängden av lösningar till $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$ och kallas A 's eigenrum hörande till eigenvärdet λ .

b) i) Vi undersöker först matrisen A . Den karakteristiska ekvationen är

(5)

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

$\Rightarrow A$'s egenvärden är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Vi undersöker nu motsvarande egenrum: Egenrummet hörande till $\lambda_1 = 1$. Vi löser

$$(A - I_3)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Allmän lösning: $\bar{x} = t \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Det följer att $\left\{ \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet.

För att undersöka egenrummet hörande till $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ löser vi $(A - 2I_3)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Allmän lösning:} \\ \bar{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Det följer att $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet. Vi ser alltså att matrisen

A har 2 ~~stücken~~ 1-dimensionella egenrum. $\Rightarrow$ Det finns inte någon bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till A $\Rightarrow A$ är inte diagonaliserbar. (Diagonaliseringssatsen)

i) Vi fortsätter nu med att undersöka matrisen B . Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

↑
kofaktorutveckla längs kolumn 2

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow B$'s egenvärden är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Vi undersöker nu motsvarande egenrum:

För att undersöka egenrummet hörande till $\lambda_1 = 1$ löser vi $(B - 1I_3)\bar{x} = \bar{0}$ (6)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Allmän lösning:

$$\bar{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Det följer att $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet.

För att undersöka egenrummet hörande till $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ löser vi $(B - 2I_3)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Allmän lösning:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

Det följer att $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i egenrummet.

Vi ser att det finns en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till $B \Rightarrow$ (Diagonaliserings)

B är diagonaliserbar. Vi fortsätter enligt standardproceduren.

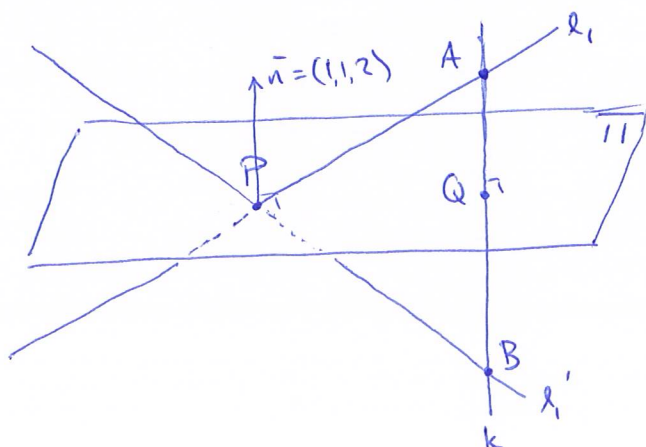
Skapa P : Ställ egenrummens (respektive) basvektorer som kolonner i P : $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Skapa D : Ställ motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen i D : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Med dessa matriser P och D gäller nu $B = PDP^{-1}$, dvs vi har diagonaliserat matrisen B .

7 Vi börjar med att bestämma ekvationen för spegelbilden av l_1 i planet Π .

Problemet beskrivs av följande figur:



Vi kallar spegelbilden av l_1 för l_1' . Resten av notationen förklaras efter hand i lösningen nedan.

Från planets ekvation läser vi av planets normal $\bar{n} = (1, 1, 2)$.

Till att börja med bestämmer vi skärningspunkten P mellan l_1 och Π :

$$P = (-1+2t, 2-3t, 1+t) \text{ där } t \text{ ges av ekvationen } (-1+2t) + (2-3t) + 2(1+t) = 1 \\ \Leftrightarrow 3+t = 1 \Leftrightarrow \underline{t = -2} \Rightarrow \underline{P = (-5, 8, -1)}.$$

Vi väljer nu en annan punkt A på linjen l_1 , t.ex. $A = (-1+2t, 2-3t, 1+t)|_{t=0} = \underline{(-1, 2, 1)}$

Vi bestämmer sedan punkten B = spegelbilden av A . Det gör vi genom att bestämma linjen k som passerar genom A i normalen $\vec{n}$'s riktning.

$$\underline{k: (x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(1, 1, 2), t \in \mathbb{R}.$$

Vi bestämmer skärningspunkten Q mellan k och Π : $Q = (-1+t, 2+t, 1+2t)$ där t ges av $(-1+t) + (2+t) + 2(1+2t) = 1 \Leftrightarrow 3+6t = 1 \Leftrightarrow \underline{t = -\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \underline{Q = (-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3})}$. Observera nu att vi får B om vi "går dubbelt" så långt" längs k (jämfört med sträckan från A till Q):

$$B = (-1+t, 2+t, 1+2t)|_{t=-\frac{2}{3}} = \underline{(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})}.$$

Vi får nu en riktningsvektor $\vec{PB}$ för l'_1 : $\vec{PB} = (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) - (-5, 8, -1) \\ = (\frac{10}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(5, -10, 1)$. För enkelhets skull väljer vi $\vec{v} = (5, -10, 1)$

som riktningsvektor för spegelbilden l'_1 .

$$\Rightarrow \underline{l'_1: (x, y, z) = P + t\vec{v} = (-5, 8, -1) + t(5, -10, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Till sist observerar vi att l_2 är parallell med planet Π eftersom $(1, 1, -1) \cdot \vec{n} = (1, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 0$. Alltså räcker det att spegla en punkt på l_2 , t.ex. $A = (-1, 2, 1)$ (som vi redan speglat ovan), och sedan använda samma riktningsvektor som l_2 , för att erhålla spegelbilden l'_2 av l_2 .

Alltså är $\ell_2': (x, y, z) = B + t(1, 1, -1) = \left(-\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) + t(1, 1, -1), t \in \mathbb{R}$ (8)

[8] För att för T 's standardmatris behöver vi $T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2)$ och $T(\bar{e}_3)$, men vi har enbart information om $T(\bar{u}_1)$ och $T(\bar{u}_2)$. Men observera att

$$\bar{u}_2 - 2\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{e}_3 \quad (*) \text{ och att}$$

$$3\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2. \quad (**)$$

Med hjälp av den givna informationen kan vi inte uttrycka både $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ m.h.a. $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$. Det betyder att vi för att bestämma alla sådana T behöver lata/bestämma T avbildar (t.ex.) vektorn $\bar{e}_2$ på en (godtycklig) vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Observera

nu att vi för:

$$T(\bar{e}_1) = T(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_2) \stackrel{T \text{ linjär}}{\downarrow} = T(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) - 2T(\bar{e}_2) \stackrel{(*)}{\downarrow} = T(3\bar{u}_1 - \bar{u}_2) - 2T(\bar{e}_2)$$

$$\stackrel{T \text{ linjär}}{\uparrow} = 3T(\bar{u}_1) - T(\bar{u}_2) - 2T(\bar{e}_2) = 3\bar{v}_1 - \bar{v}_2 - 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a \\ -4-2b \\ -5-2c \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (\text{enligt ovan})$$

$$T(\bar{e}_3) \stackrel{(\#)}{\downarrow} = T(\bar{u}_2 - 2\bar{u}_1) \stackrel{T \text{ linjär}}{\uparrow} = T(\bar{u}_2) - 2T(\bar{u}_1) = \bar{v}_2 - 2\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$T \Rightarrow \text{standardmatris är } A = (T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2) \ T(\bar{e}_3)) = \begin{pmatrix} 2-2a & a & -1 \\ -4-2b & b & 5 \\ -5-2c & c & 6 \end{pmatrix}$$

Eftersom varje $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ger upphov till en sådan linjär avbildning så finns det oändligt många T som uppfyller de givna villkoren.