Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren, tel. 031-7723066

Linjär algebra, MMG200
2018-12-20, kl. 08.30–12.30

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $AB + A$.

   b) Är följande påstående sant eller falskt? *Om $H = span\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ där $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är linjärt oberoende, och om $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är en ortogonal mängd i H, så är $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ en bas i H.*

   c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix}$.

   d) Ge ett exempel på en ortogonal 2×2-matris som inte är en diagonalmatris.

2. Bevisa att en $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

3. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay + az = 1 \\ 2x + (a+3)y + 4z = 4 \\ 3x + 5y + (a+4)z = 5 \end{cases}$$

   för varje värde på den reella konstanten a.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) Visa att det överbestämda linjära ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning.

   b) Bestäm minsta-kvadratlösningen till systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

b) Beräkna A^{100}.

6. En triangel T har hörnen $A = (1,0,1)$, $B = (1,-1,0)$ och det tredje hörnet C ligger på den räta linjen $\ell : (x,y,z) = (t,t,t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestäm det värde på parametern t som ger triangeln T minsta möjliga area. Bestäm även denna minimala area.

b) Låt nu T vara den triangel som har hörn i punkterna A, B och $D = (0,0,0)$. Låt dessutom Π vara det plan som innehåller triangeln T. Bestäm ekvationen för ett av de plan som är parallella med, och har avstånd $2\sqrt{3}$ till, planet Π.

7. a) Ge en koordinatfri definition av kryssprodukten.

b) Låt $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestäm avbildningens standardmatris och visa att avbildningen f är inverterbar.

c) Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

8. Låt A vara en $m \times n$-matris. Visa att A har linjärt oberoende kolumner om och endast om matrisen $A^T A$ är inverterbar.

Lycka till och God Jul!