

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

a) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$.

b) Är följande påstående sant eller falskt? *En $n \times n$ -matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n egenvärden (räknade med multiplicitet).*

c) Låt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{B}\mathbf{y})$.

d) Ge ett exempel på en 2×2 -matris som är diagonaliserbar men inte ortogonalt diagonaliserbar.

2. a) Låt A vara en $m \times n$ -matris. Bevisa att $\text{Nul}A$, dvs. nollrummet till matrisen A , är ett delrum av $\mathbb{R}^n$. Motivera noggrant vad syftet är med varje del av beviset.

b) Formulera och bevisa Pythagoras sats för vektorer i $\mathbb{R}^n$.

3. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax & + & ay & + & az & = & a \\ 2x & + & (a+3)y & + & 4z & = & 4 \\ 3x & + & 5y & + & (a+4)z & = & 5 \end{cases}$$

för varje värde på den reella konstanten a .

4. En linjär avbildning $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definieras genom

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ = (x_2 - 2x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4, 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4, -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 5x_4). \end{aligned}$$

a) Bestäm avbildningens standardmatris A .

b) Bestäm baser i matrisen A 's kolumnrum och nollrum.

c) Avgör om avbildningen F är injektiv.

5. a) I vilken punkt skär linjen $\ell : (x, y, z) = (2, -4, 4) + t(1, 0, -2)$, $t \in \mathbb{R}$, det plan som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ och $(0, 2, 2)$?
- b) Bestäm (det kortaste!) avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen ℓ .
6. a) Låt A vara en $m \times n$ -matris och låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Definiera begreppet *minstakvadratlösning* till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ge även en definition av det tillhörande *minstakvadratfelet*.
- b) Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och låt $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^4$. Låt dessutom $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ -4 \\ 3 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Bestäm vektorer $\mathbf{y} \in W$ och $\mathbf{z} \in W^\perp$ sådana att $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Motivera noggrant.
7. a) Definiera begreppen egenvärde, egenvektor och egenrum för en kvadratisk matris A .
- b) Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.
- c) Bestäm den allmänna lösningen till det diskreta dynamiska systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, då $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
8. a) Bevisa att om A är en $n \times n$ -matris, så gäller $\det A^T = \det A$.
- b) Beräkna följande $n \times n$ -determinant:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

Motivera noggrant.

Lycka till!