Göteborgs Universitet
Institutionen för Matematiska Vetenskaper
Anders Södergren (031-7723066)

Linjär algebra, MMG200
2019-08-21, kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Gustav Lindwall,
tel. 031-7725325

Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Poängindelning: Uppgift 1 kan ge 2 poäng. Uppgifterna 2-6 kan ge 3 poäng vardera. Uppgifterna 7-8 kan ge 4 poäng vardera.

Betygsgränser: För betyget Godkänd (G) krävs minst 12 poäng och för betyget Väl godkänd (VG) krävs minst 18 poäng.

Anvisningar: Om inte annat anges skall samtliga lösningar vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. På denna uppgift ska enbart svar anges. En halv poäng per korrekt angivet svar.

   a) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Beräkna $\det(AB)$.

   b) Är följande påstående sant eller falskt? *Låt* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. *Mängden Span*$\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ *beskriver alltid ett plan genom origo.*

   c) Låt $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Beräkna $\boldsymbol{x} \times (A\boldsymbol{y})$.

   d) Ange alla (reella) ortogonala 1×1-matriser.

2. a) Låt $S = \{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Bevisa att om $r > n$, så är mängden S linjärt beroende.

   b) Bevisa att om A är en symmetrisk matris så är egenvektorer hörande till olika egenvärden ortogonala mot varandra.

3. a) Ge definitionen för att en icketom mängd $S = \{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ av vektorer är linjärt oberoende.

   b) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & + & 9x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & 3x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & - & x_4 & + & 7x_5 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & 9x_5 & = & -4 \end{array}\right. .$$

   Redovisa noggrant.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm alla minstakvadratlösningar till det linjära ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Motivera noggrant.

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ definieras genom

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4).$$

   a) Bestäm avbildningens standardmatris A.

   b) Bestäm en ON-bas för matrisen A:s nollrum.

6. a) Definiera begreppen egenvärde, egenvektor och egenrum för en kvadratisk matris A.

   b) Avgör om matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbara. Diagonalisera sedan den eller de matriser som är diagonaliserbara.

7. Låt ℓ_1 vara linjen som ges av ekvationen $(x,y,z) = (-1,2,1) + t(2,-3,1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt ℓ_2 vara linjen som ges av ekvationen $(x,y,z) = (-1,2,1) + s(1,1,-1)$, $s \in \mathbb{R}$. Låt dessutom Π vara planet som ges av ekvationen $x + y + 2z = 1$. Bestäm ekvationerna på parameterform för spegelbilderna av ℓ_1 och ℓ_2 i planet Π.

8. Bestäm standardmatriserna till alla linjära avbildningar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1 \qquad \text{och} \qquad T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2,$$

   där

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lycka till!