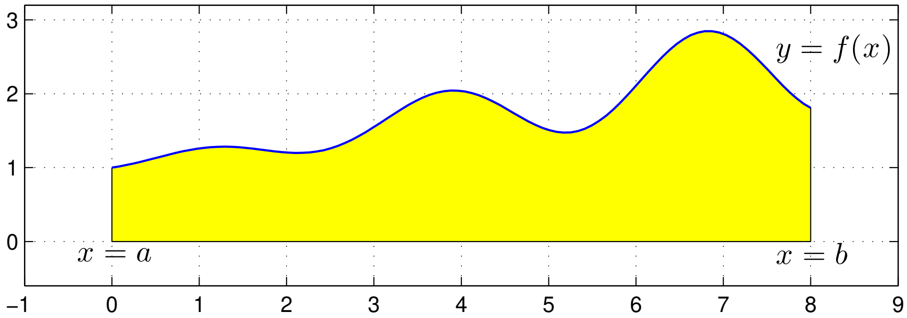
Numerisk beräkning av integraler

1 Inledning

Ibland kan man inte bestämma integraler exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer. T.ex. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ kan inte beräknas exakt, eftersom det inte finns någon användbar primitiv funktion. Det kan också vara så att integranden bara är känd i vissa punkter, t.ex. vi har en serie med mätdata.

2 Beräkningsmetoder

Den geometriska tolkningen av integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är arean av ytan mellan grafen av integranden $y = f(x)$ och x-axeln, dvs. $y = 0$, mellan $x = a$ och $x = b$.



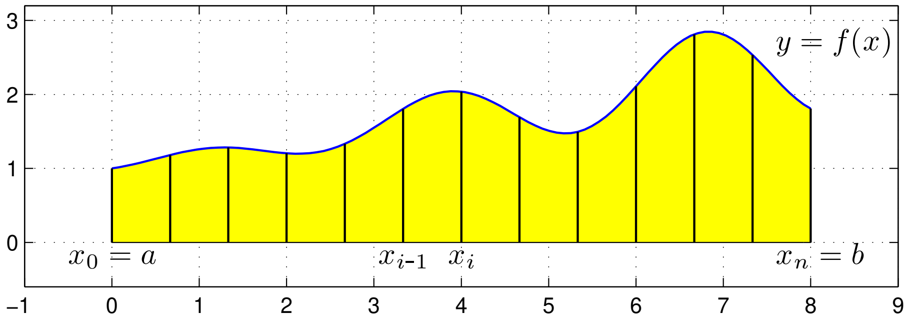
Vi gör en likformig indelning av intervallet $a \leq x \leq b$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi får n lika långa delintervall $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ med bredden $h = \frac{b-a}{n}$.

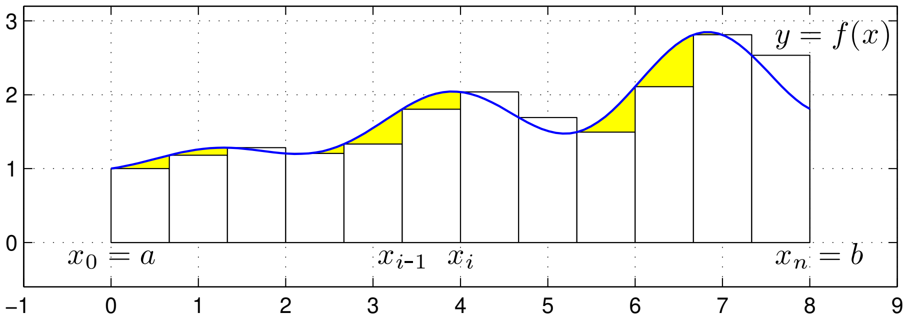
Sedan delar vi upp integralen i en summa av delintegraler över varje delintervall

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$



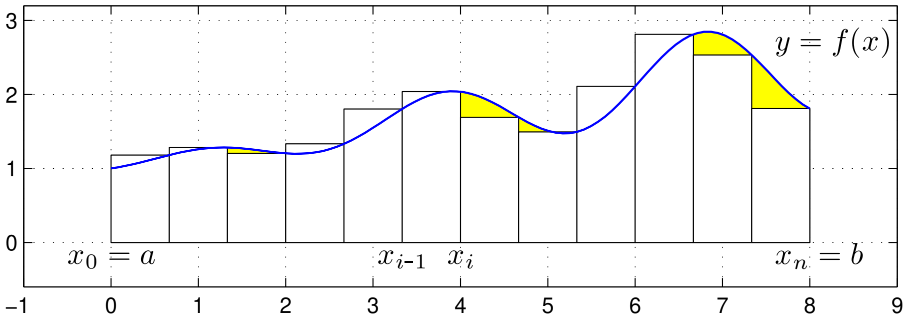
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ får vi **vänster rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\,f(x_{i-1})$$



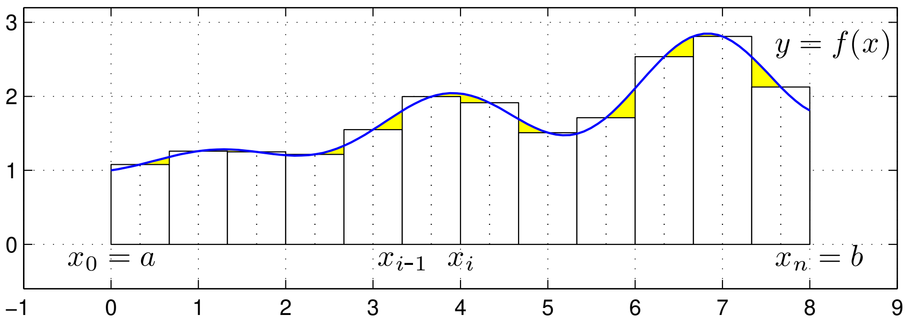
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_i)$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ får vi **höger rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\,f(x_i)$$



Om vi approximerar $f(x)$ med $f(m_i)$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, där m_i är mittpukterna i intervallen, får vi **mittpunktsmetoden**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} h\,f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$



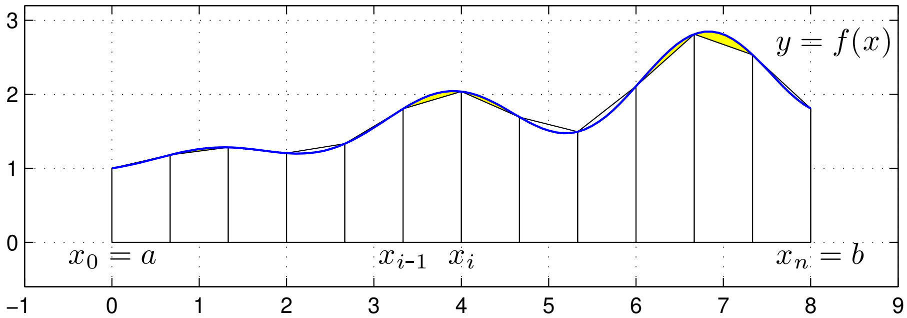
I Persson-Böiers kapitel 6.2 definieras (konstrueras) integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ med hjälp av Riemann-summan

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)h_i$$

Metoderna ovan är olika varianter av Riemannsummor, med $c_i = x_{i-1}$, $c_i = x_i$ respektive $c_i = m_i$, och $h_i = h$.

Vi kan också approximera integralen med medelvärdet av vänster och höger rektangelregel och får då **trapetsmetoden**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$



Antag att vi vill beräkna $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ med vänster rektangelregel med $n = 100$. Vi skulle kunna göra så här

```
>> n=100;
>> f=@(x)x.*sin(x); a=0; b=1;
>> h=(b-a)/n
>> q=0;
>> for i=0:n-1
        x=a+i*h;
        q=q+h*f(x);
   end
>> q
```

Att använda en `for`-sats är oftast inte effektivt i Matlab. Vi bildar hellre en radvektor av alla funktionsvärdena $f(x_i)$ och sedan summerar dessa enligt

```
>> n=100;
>> f=@(x)x.*sin(x); a=0; b=1;
>> x=linspace(a,b,n+1);
>> h=(b-a)/n;
>> q=sum(h*f(x(1:n)))
```

Detta sätt att organisera en beräkning kallas att vektorisera den, dvs. man bildar först en eller flera vektorer och utför sedan den önskade beräkningen på dem. De elementvisa operationerna `.*` `./` `.^` är exempel på vektoriserade operationer. Vi använde funktionen `sum` som snabbt summerar en vektor.

Uppgift 1. Beräkna en approximation av integralen $\int_0^1 x\,\sin(x)\,dx$ med vänster och höger rektangelregel samt mittpunkts- och trapetsmetoderna. Använd `sum`.

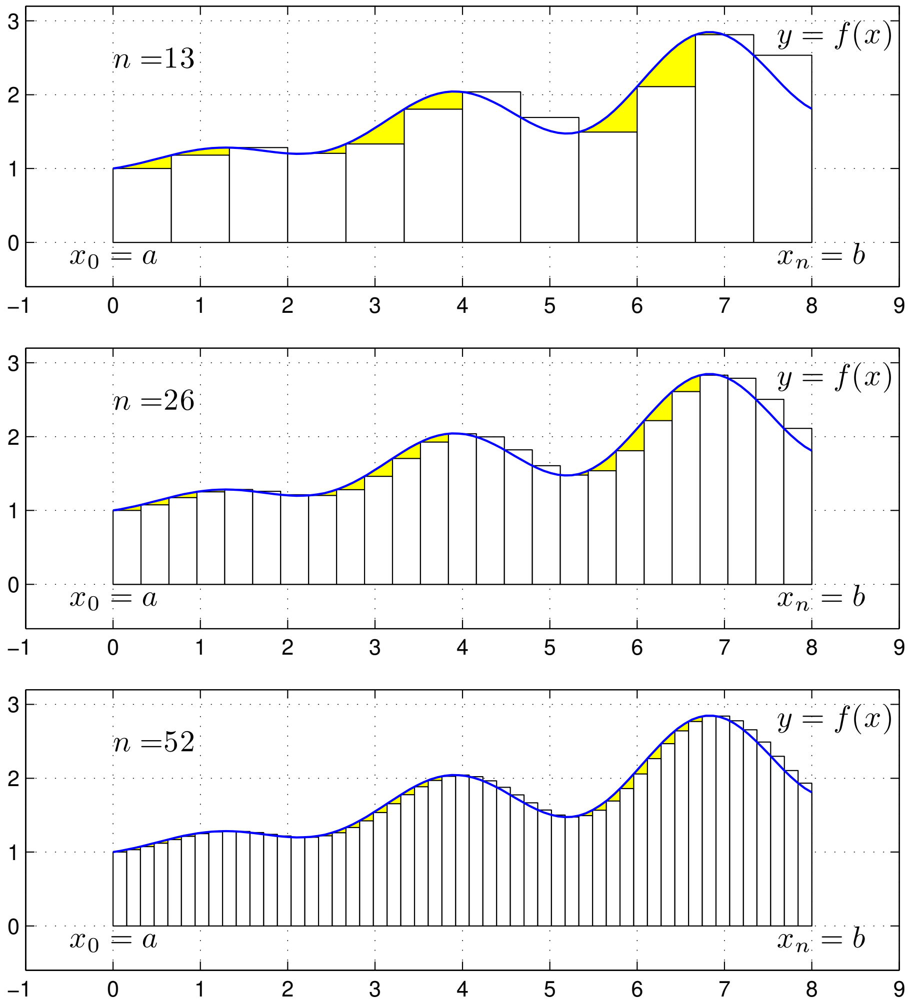
Uppgift 2. Skriv en funktion med namnet `min_integral` som beräknar integralen approximativt. Funktionen skall ha anropet `q=min_integral(f,I,n,k)`, där `f` är ett funktionshandtag till funktionen som beräknar $f(x)$, `I` är en radvektor som ger intervallet $a \le x \le b$, `n` ger antal delintervall (steglängden ges av $h = (b-a)/n$) och `k` ger metoden som skall användas ($k = 1, 2, 3, 4$ ger vänster och höger rektangelregel, mittpunkts- och trapetsmetoderna respektive).

Uppgift 3. Testa ditt program på följande integraler. Variera metodval och antal delintervall n.

(a). $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ **(b).** $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **(c).** $\int_0^1 \tan(\sqrt{x})\,dx$

3 Konvergens

För metoderna ovan gäller att samtliga är konvergenta, dvs. låter vi antal delintervall n gå mot oändligheten så går approximationerna mot integralens värde. Vi ser på några bilder för vänster rektangelregel där n blir allt större



Vi ser att vi allt bättre täcker upp ytan under grafen med allt fler och smalare staplar.

Nu räcker det i praktiken inte med konvergens. Vi måste få en bra approximation på en kort tid, dvs. inte behöva ta n alltför stort.

För vänster och höger rektangelregel gäller att om vi fördubblar antal delintervall så halveras felet i approximationen av integralen. För mittpunkts- och trapetsmetoderna gäller vid samma fördubbling att felet delas med fyra, dvs. mycket bättre utdelning.

Uppgift 4. Vi ser på integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ igen. Beräkna integralen exakt (för hand). Jämför exakt värde med de approximationer vi får med metoderna ovan för olika antal delintervall n. Hur stort blir felet? Tag t.ex först $n = 50$ och sedan $n = 100$, beräkna felen i approximationerna och se efter hur felen förändras.

4 Färdiga program i Matlab

Det finns färdiga funktioner i Matlab för att integrera. En sådan funktion är `integral` som används enligt

```
q=integral(fun,a,b)      q=integral(fun,a,b,name,value)
```

där `fun` är en funktion som beskriver integranden, `a` och `b` ger integrationsintervallet.

Funktionen `fun` måste kunna beräkna funktionsvärden för en radvektor `x`, dvs. elementvisa operationer skall användas.

Om vi vill använda `integral` för att beräkna integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ så skulle det se ut så här

```
>> f=@(x)x.*sin(x); a=0; b=1;
>> q=integral(f,a,b)
```

Genom att ge `name` som `'AbsTol'` eller `'RelTol'` kan vi ange önskad absolut respektive relativ noggrannhet i beräkningen och med `value` ger vi värdet på noggrannheten.

Uppgift 5. Beräkna arean av det slutna området mellan graferna till funktionerna

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{och} \quad h(x) = x^2 - 3x + 2\,.$$

Rita en bild av området. Använd `fzero`, `fill` och `integral`. Tänk på att använda elementvisa operationer.