LÖSNINGSFÖRSLAG
ENVARIABELANALYS, MMG200
FREDAG 18:E JANUARI 2019

(1) Se anteckningar/lärobok

(2) (a) Se anteckningar/lärobok

(b) $\pi \sim 3$, så $\pi < 4$, och då $(\pi/2)^2 < \pi$, och $\sin((\pi/2)^2) > 0$. Betrakta $f(x) = \sin(x^2) - \cos(x)$ för $x = 0$ och $x = \pi/2$. $f(0) = -1$ och $f(\pi/2) > 0$, samt f är kontinuerlig. Vi kan tillämpa satsen om mellanliggande värde.

(3) (a) Produktregeln för gränsvärden ger

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

Eftersom $x^2 + 3x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ har vi

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = x + 3 \to 4 \text{ då } x \to 1,$$

dvs.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = 2.$$

(b) Vi skriver om gränsvärdet enligt

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\ \ln(\tan t) = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\tan t}} \cdot \sqrt{\tan t}\ln(\tan t).$$

Standardgränsvärdet $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ och produktregeln ger

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\tan t}} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\sin t}} \cdot \sqrt{\cos t} = 1.$$

Kom ihåg att

$$\sqrt{y}\ln y \to 0 \text{ då } y \to 0^+.$$

Sätter vi $y = \tan t$ och observerar att $y \to 0^+$ då $t \to 0^+$ ger detta att

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\tan t}\ln(\tan t) = 0$$

och av produktregeln följer därmed

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\ \ln(\tan t) = 0.$$

(4) (a)

$$\int_0^1 (\ln(x))^2 dx = [y = \ln(x), dy = \frac{1}{x}dx, x = e^y, dx = e^y dy]$$

$$= \int_{-\infty}^{0} y^2 e^y dy = [y^2 e^y]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2ye^y dy = -2[ye^y]_{-\infty}^{0} + 2\int_{-\infty}^{0} e^y = 2[e^y]_{-\infty}^{0} = 2$$

(b)

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int_2^3 (1 + \frac{2}{x^2-1}) dx = 1 + \int_2^3 (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) dx$$

$= 1 + [\ln(x-1) - \ln(x+1)]_2^3 = 1 + \ln(2) - \ln(4) - \ln(1) + \ln(3) = 1 + \ln(3) - \ln(2).$

(5) Vi har

$$f(x) = 2(x-1)e^{-(x-1)^2}$$

vilken har derivatan

$$f'(x) = -2\big((x-1)^2 - 1/2\big)e^{-(x-1)^2}.$$

Eftersom $e^y > 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$ ger detta teckentabellen

x		$1-1/\sqrt{2}$		$1+1/\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$--$	0	$++$	0	$--$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

vilket innebär att f har en lokal minimipunkt i $x = 1 - 1/\sqrt{2}$ och en lokal maximipunkt i $x = 1 + 1/\sqrt{2}$. Eftersom $e^{-y^2} \to 0$ då $y \to \pm\infty$ gäller vidare att

$$f(x) \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Det största värdet för funktionen f är därmed

$$f(1 + 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

och det minsta är

$$f(1 - 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}.$$

(6) (a) Lösning för homogenaekvationen: $r^2 + 1 = 0$, så $r = \pm i$, så $y_h = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$.

$$y_p = Ax\sin(x) + Bx\cos(x),$$

så

$$y_p' = A(\sin(x) + x\cos(x)) + B(\cos(x) - x\sin(x)),$$

$$y_p'' = A(2\cos(x) - x\sin(x)) + B(-2\sin(x) - x\cos(x)).$$

Så $y_p'' + y_p = 2A\cos(x) - 2B\sin(x) = \sin(x)$, dvs. $A = 0, B = -1/2$. Altså lösningen är $y = C_1\sin(x) + C_2\cos(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)$.

(b) För allmän lösning se (a). $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ betyder $C_1 = 0$,

$$y'(\frac{\pi}{2}) = -C_2 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = 1.$$

Så $C_2 = -1 + \frac{\pi}{4}$. Svaret: $y = (-1 + \frac{\pi}{4})\cos(x) + \frac{1}{2}x\cos(x)$.

(7) Låt ℓ beteckna längden av den del som böjs till en cirkel, dvs. cirkelns omkrets. Cirkelns radie är då $\ell/2\pi$ och kvadratens sidlängd $(10-\ell)/4$. Detta betyder att summan av arean av cirkeln och arean av kvadraten ges av

$$A(\ell) = \pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 + \frac{(10-\ell)^2}{4^2}.$$

Derivering ger

$$A'(\ell) = \frac{\ell}{2\pi} - \frac{10-\ell}{8} = \frac{(4+\pi)\ell - 10\pi}{8\pi}$$

och därmed teckentabellen

ℓ	0		$10\pi/(4+\pi)$		10
$A'(\ell)$		$--$	0	$++$	
$A(\ell)$	$25/4$	$\searrow$		$\nearrow$	$25/\pi$

Vi ser nu att maximal area $A(\ell)$ erhålls då $\ell = 10$ och minimal area då $\ell = 10\pi/(4+\pi)$.

(8) $f(x) = x^18(\sum_{j=0} \infty x^{3j}$, då $f^{(2019)}(0)$ motsvarar till en koefficient in MacLaurin's serie (som blir 1 for x^{2019}), vi ser att $f^{(2019)} = 2019!$.