

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200
måndag den 13 april 2015, 8³⁰ – 12³⁰

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 2 som kan ge fyra poäng.

1. Formulera medelvärdessatsen och bevisa den i fallet att $f(a) = f(b)$.
2. (a) Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värde. (3p)
(b) Bevisa med hjälp av satsen om mellanliggande värde att det finns ett positivt reellt tal a med $a^2 = 2$. (1p)
3. Bestäm största och minsta värde av $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ på intervallet $[0, 5]$.
4. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx .$$

5. Definiera $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \frac{2x^2 + \ln x}{x + \arctan x} .$$

Avgör om f har en sned asymptot då $x \rightarrow \infty$ och beräkna den i förekommande fall.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3e^x \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

7. Definiera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a och b så att f blir deriverbar i $x = 0$.

8. Bestäm a så att gränsvärdet

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^a} \int_0^x t^2 - \sin t^2 dt$$

existerar och är skilt från 0. Vad blir A för detta värde på a ?