# Förslag till lösningar,
# Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 4 april 2016

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. a) Vi observerar att $\dfrac{\tan 2x}{2x} = \dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{1}{\cos 2x} \to 1, x \to 0$. Dessutom är $\dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x} \to D\arctan x\Big|_{x=0} = 1, x \to 0$. Så

$$\frac{\tan 2x}{\arctan x} = 2\,\frac{\tan 2x}{2x}\frac{x}{\arctan x} \to 2, x \to 0\ .$$

b)

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to \frac{1}{2}, x \to \infty\ .$$

c) Vi använder standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ och får

$$\frac{1-e^{x/2}}{1-e^{x/3}} = \frac{3}{2}\,\frac{1-e^{x/2}}{x/2}\,\frac{x/3}{1-e^{x/3}} \to \frac{3}{2}\ .$$

4. Låt $f(x) = \arctan(e^x)$. Då är $f(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Dessutom är $f'(x) = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}\,e^x$ och $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Tangenten går genom punkten $(0, f(0)) = (0, \dfrac{\pi}{4})$ och har riktningskoefficienten $k_t = f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Så tangentens ekvation är

$$\frac{y-\pi/4}{x-0} = -\frac{1}{2} \text{ eller } y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\ .$$

Normalen har riktningskoefficienten $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -2$, så normalens ekvation är

$$\frac{y-\pi/4}{x-0} = -2 \text{ eller } y = -2x + \frac{\pi}{4}\ .$$

5.

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} 2x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = x^2, dt = 2xdx \\ 0 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}dt$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{2}[-e^{-t}]_0^\infty = \frac{1}{2}\,.$$

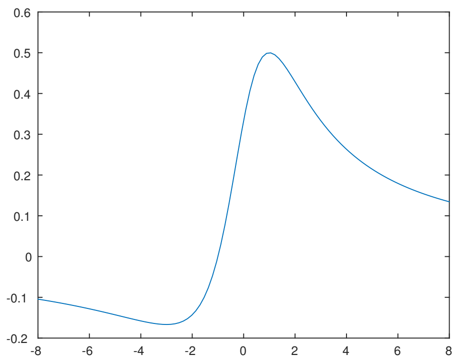
6. Funktionen är definierad och deriverbar för alla reella $x$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{3-2x-x^2}{(x^2+3)^2} == -\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}\,.$$

Vi får följande teckentabell

| $x$ | | $-3$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-\ -$ | $0$ | $+\ +$ | $0$ | $-\ -$ |
| $y$ | $\searrow$ | $-1/6$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\searrow$ |

Alltså har $f$ ett lokalt minimum $-1/6$ då $x = -3$, och ett lokalt minimum $1/2$ då $x = 1$. Men eftersom nämnarens gradtal är större än täljarens gäller $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ så dessa lokala extremvärden är funktionens största och minsta värde.




7. a) Serien är konvergent ty $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$

b) Serien är divergent ty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

c) Serien är konvergent. Eftersom $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$ (jämför Uppgift 3a) gäller $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan 1/x}{1/x} = 1$. Så om $n \geq N$ för ett tillräckligt stort $N$ gäller $\frac{\arctan(1/n)}{1/n} < 2$ och $\arctan(1/n) < \frac{2}{n}$ . Detta ger

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n} \leq 2\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \, .$$

8. Låt $V(t)$ och $A(t)$ vara hagelkornets volym respektive area vid tiden $t$. Enligt antagandet gäller $V'(t) = kA(t)$.

   Eftersom $V(t) = Vr(t)^3$ och $A(t) = Ar^2(t)$ där $r(t)$ är hagelkornets radie så gäller $A(t) = cV(t)^{2/3}$. (Här är $V = 4\pi/3$ och $A = 4\pi$ enhetsbollens volym respektive area men värdet på dessa konstanter har ingen betydelse här.)

   Vi får med $K = ck$ att

$$V' = kcV^{2/3} = KV^{2/3} \, .$$

   Denna ekvation är separabel. Vi har $dV/V^{2/3} = Kdt$ och $3V^{1/3} = Kt + C$ eller $V^{1/3} = K_1 t + C_1$.

   Villkoren $V(0) = 0,1$ och $V(15) = 0,8 = 2^3 \cdot 0,1$ ger

$$C_1 = 0,1^3 \text{ och } 15K_1 + C_1 = 2 \cdot 0,1^{1/3} \text{ så } K_1 = \frac{0,1^{1/3}}{15} \, .$$

   Till sist ger $V(t) = 2,7 = 3^3 \cdot 0,1$ att

$$3 \cdot 0,1^{1/3} = K_1 t + C_1 = 0,1^3 \left(\frac{t}{15} + 1\right)$$

   Så $\frac{t}{15} + 1 = 3$ vilket ger $t = 30$.