MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Hjälpmedel: medföljande formelblad
Datum: 2007-06-04 kl. 08.30–13.30
Telefonvakter: Marcus Warfheimer
tel. 076 2721861

Flervariabelanalys, del 2, man030

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att f är en integrerbar funktion på rektangeln $\triangle = [a, b] \times [c, d]$. (3p)

(a) Definiera begreppet integrerbar.

(b) Visa att

$$\iint_{\triangle} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

givet att enkelintegralerna existerar.

2. Ange först Abel's partiella summationsformel (utan bevis) och formulera och bevisa sedan Dirichlets test för konvergens av en serie av typen $\sum_1^\infty a_k b_k$. (3p)

3. Antag att $(f_n)_0^\infty$ är en funktionsföljd på mängden M (i $\mathbb{R}^N$ eller $\mathbb{C}$) som konvergerar likformigt på M mot funktionen f. (3p)

(a) Ange vad som menas med att $f_n \to f$ likformigt på M.

(b) Visa att om f_n alla är kontinuerliga på M så är också gränsfunktionen f kontinuerlig på M.

4. Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x}{x^2 + y^2} dy$$

längs med kurvan $\gamma : x^2 + y^2/4 = 1$ från $(1, 0)$ till $(0, 2)$.

5. Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D \frac{ln(2 + x + y)}{1 + (x - y)^2} dxdy$$

där D är kvadraten med hörn i punkterna $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ och $(0, -1)$.

6. Visa att följande funktionsserie respektive funktionsföljd konvergerar likformigt på M (4p)

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-n^2 x}, \quad M = [0, \infty] \qquad b) \quad \left(nsin \frac{x}{n} \right)_1^\infty, \quad M = [-1, 1].$$

7. För vilka komplexa z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} z^{2n}$? (3p)

8. Beräkna (3p)

$$\iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$$

där D är det glasstrutsliknande området som ges av olikheterna

$$3(x^2 + y^2) \le z^2 \le 1 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0.$$

Lycka till!
Tommy