

Flervariabelanalys, del 2, man030

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Låt f vara en funktion som är kontinuerlig på rektangeln $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Vi vet då att f är integrerbar på Δ och att skivformeln för beräkning av dubbelintegralen gäller, dvs (4p)

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

- (a) Definiera vad som menas med att f är (Riemann)integrerbar över Δ .
(b) Visa att enkelintegralerna till höger i skivformeln existerar.

2. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

3. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)

4. Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_{\gamma} (4y + xe^{x^2+y^2}) dx + (3x + ye^{x^2+y^2}) dy$$

längs med kurvan $\gamma : y = \sin x$ från $(0, 0)$ till $(\pi, 0)$.

5. Bestäm ett värde på α så att fältet $\mathbf{u} = (\alpha z^2, y^2, (2x + 1)z)$ blir konservativt. (3p)

Beräkna sedan, för detta värdet på α , det arbete som fältet \mathbf{u} uträttar längs kurvan: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z = x$ från punkten $(0, -1, 0)$ till punkten $(0, 1, 0)$.

6. För vilka komplexa z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \frac{1}{n})^{n^3} z^n$? (3p)

7. Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_D (x + y^2 + z^3) dx dy dz$$

där $D: x^2 + y^2 \leq 1 + z$, $0 \leq z \leq 3$.

8. Visa att funktionsserien (3p)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x/k} e^{-k/x}, \quad x > 0$$

konvergerar likformigt på $]0, R[$ där $R > 0$ men inte likformigt på $]0, \infty[$.

Vad är $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$? (Motivera!)

Lycka till!
Tommy