MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Hjälpmedel: medföljande formelblad
Datum: 2008-05-27 kl. 08.30–13.30
Telefonvakt: Martin Berglund.
tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiiera vad som menas med att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i ett öppet område Ω i R^2. (4p)

   (b) Visa att om $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt $\mathbf{a}$ och slutpunkt $\mathbf{b}$.

2. Bevisa Abels partiella summationsformel: (3p)
$$\sum_{m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{m+1}B_m + \sum_{m+1}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k \text{ där } B_n = \sum_{1}^{n} b_k.$$

3. Visa att för en komplex potensserie $\sum_0^\infty c_n z^n$ så gäller ett av följande. (3p)

   (a) Den konvergerar för alla z.

   (b) Den konvergerar bara för $z = 0$.

   (c) Det finns ett tal $R > 0$ så att den konvergerar för $|z| < R$ och divergerar för $|z| > R$.

4. Beräkna dubbelintegralen (3p)
$$\iint_D (x - 2y)(2x + 3y)^{1/3} dxdy$$
där D är parallellogrammen med hörn i $(2, -1),\ (4, 0),\ (1, 2)$ och $(-1, 1)$.

5. Beräkna flödet ut ur cylinderområdet $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ av vektorfältet (3p)
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^2 z, x^2 z)$$

6. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{n^{1/3}} z^{4n}$? (3p)

7. Bestäm den slutna kurva γ utan dubbelpunkter, så att kurvintegralen (3p)
$$\int_\gamma 6xy\, dx + (x^3 + 3xy^2)\, dy$$
blir så stor som möjligt då γ genomlöps *medurs*.

8. Låt $f_n(x) = n^3(n^2 \sin \frac{x + n}{n^2} - x \cos \frac{x + n}{n^2})$. Bestäm en talföljd $(a_n)_1^\infty$ så att $f_n - a_n$ blir likformigt konvergent på varje ändligt intervall. Bestäm sedan $\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - a_n)$. (3p)

Lycka till!
Sven