MATEMATIK | **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet | Datum: 2008-08-27 kl. 08.30–13.30
Tentamen | Telefonvakt: Fredrik Lindgren.
tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med ett potentialfält i ett öppet område $\Omega \in \mathbf{R^2}$. (3p)
   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält med potential av klass C^2 i Ω så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

2. Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig i $\{(x, y) : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$ om
   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \leq x \leq b$.
   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \leq x \leq b$.

3 Antag att (f_n) är en föjd C^1-funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I. Visa att om då (f'_n) konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1-funktion f med $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ (3p)

4. .För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+n^2} z^n$? (3p)

5. Beräkna dubbelintegralen (3p)
$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dxdy$$
   där D är triangelytan med hörn i punkterna (0,0), (4,0) och (2,2).

6. Beräkna ytintegralen (3p)
$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$
   där S är konen $x^2 + y^2 = a^2 z^2 / b^2$, $0 \leq z \leq b$.

7. Beräkna flödet upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ av fältet $(e^{yz}, 2xy - e^z, x^2 - z^2)$. (3p)

8. Visa att $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$ konvergerar likformigt på hela $\mathbf{R}$ om $\alpha > 1/2$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$