MATEMATIK | **Hjälpmedel: medföljande formelblad**
Göteborgs Universitet | Datum: 2009-01-16 kl. 08.30–13.30
Tentamen | Telefonvakt: Ida Säfström.
tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd konvergerar likformigt på ett intervall $[a, b]$. (4p)

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på $[a, b]$ och f_n är kontinuerlig för varje n så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.
   Att gränsfuktionen f är kontinuerlig får anses bekant.

2. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

3. Antag att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. (3p)

4. Beräkna $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^{-2} dxdydz$, där $a > 0$ och $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ (3p)

5. För vilka komplexa z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, där $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$? (3p)

6. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 - y^2$ som bestäms av olikheterna $z > 0$ och $x^2 + y^2 < 1$. (3p)

7. Visa att funktionen $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och beräkna $\int_0^1 f(x)\, dx$. (3p)

8. D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Undersök för vilka positiva heltal som $\iint_D (y^2 - x^2)(|x| + |y|)^{-n}\, dx\, dy$ är konvergent. Beräkna integralen för dessa värden på n. (3p)

Lycka till!
Sven