MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Hjälpmedel: medföljande formelblad
Datum: 2009-06-02 kl. 08.30–13.30
Telefonvakt: Christoffer Cromvik.
tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att f är en integrerbar funktion på rektangeln D: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (4p)

   (a) Definiera vad som menas med att f är integrerbar.
   (Begreppet trappfunktion får anses bekant.)

   (b) Visa att $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx$,
   givet att enkelintegralerna existerar.

2. Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd definierad i på en mängd M (i R^N eller C). (3p)

   (a) Definniera vad som menas med att $f_n \to f$ likformigt på M.

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n, så är också f kontinuerlig.

3. Formulera och bevisa Dirichlets test för konvergens av en serie av typen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. (3p)

   (Du behöver inte bevisa Abels summationsformel.)

4. Låt F vara fältet (y, z, x). Beräkna flödet av rot$F$ upp genom paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. (3p)

5. Beräkna $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, där D ges av olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$. (3p)

6. För vilka *reella* x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{n}) x^n$? Bestäm också summan av serien uttryckt i elementära funktiner. (3p)

7. Beräkna $\iint_D (2x^2 + y)\,dx\,dy$ där området D begränsas av kurvorna $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1/x$ och $y = x^2 + 1$. (3p)

8. Visa att funktionsföljden $f_n(x) = x(1 - (1 - x)^n)$ är likformigt konvergent på intervallet [0,1]. (3p)

Lycka till!
Sven