

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)
2. (a) Definiera vad som menas med att \mathbf{F} är ett potentialfält i ett öppet område Ω i R^2 . (4p)
(b) Visa att om $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt \mathbf{a} och slutpunkt \mathbf{b} .
3. Visa att för varje komplex potensserie $\sum_0^{\infty} c_n z^n$ så gäller exakt ett av följande tre. (3p)
(a) Serien är konvergent för alla z ,
(b) serien är konvergent endast för $z = 0$ eller
(c) det finns ett tal $R > 0$ så att serien är absolutkonvergent för $|z| < R$ och divergent för $|z| > R$.
4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D x^4 - y^4 dx dy$ där D är området som ges av olikheterna (3p)
 $0 \leq y \leq x$ och $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
5. Beräkna kurvintegralen $\int_C (x^3 + y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$, där C är femhörningen med hörn i (3p)
 $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ och $(0,1)$ i ordning enligt omloppsriktningen.
6. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D \frac{\sin z}{z} dx dy dz$, där D är konen $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$. (3p)
7. Bestäm alla komplexa tal z för vilka potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{\sqrt{n}} z^{3n}$ är konvergent. (3p)
8. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \sin \frac{x}{x+n} dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+a} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. & \int \frac{1}{x^2-a} dx &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|, \quad a > 0. \\ \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|, \quad a > 0. \\ \int \sqrt{x^2+a} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)\end{aligned}$$

Malaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)\end{aligned}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$